

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET
ZBORNIK RADOVA

SVEUČILIŠTE U RIJECI GRAĐEVINSKI FAKULTET

Izdavač: Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Za izdavača: Mladen Bulić, dekan

Glavna i odgovorna urednica: Martina Vivoda Prodan

Pomoćni urednici: Paulo Šćulac, Filip Horvat

Izdavački savjet:

Mladen Bulić, Leo Škec, Elvis Žic, Neira Torić Malić

Urednički odbor:

Hrvoje Bartulović, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Nejc Bezak, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Marino Brčić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet

Marijana Butorac, Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku

Tihomir Dokšanović, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek

Marko Renčelj, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo

Mladen Vukomanović, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet

Vladimir Vukobratović, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka

Natalija Bede Odorčić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Marijana Cuculić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Edita Papa Dukić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Petra Jagodnik, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Rozarija Mikić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Iva Mrak, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Paulo Šćulac, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Leo Škec, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Ksenija Tijanić Štrok, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Martina Vivoda Prodan, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Elvis Žic, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Lektorica: Saša Čohar Mančić

Adresa Uredništva: Rijeka, Ulica Radmile Matejčić 3

Grafičko rješenje omota: Alen Karlović

Tisak: Grafika Helvetica d.o.o.

Naklada: 100 primjeraka

ISSN: 2584-6159 (Online) 0350-8552 (Tisak)

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

ZBORNIK RADOVA

KNJIGA XXVIII

Rijeka, 2025.

SVEUČILIŠTE U RIJECI, GRAĐEVINSKI FAKULTET**ZBORNIK RADOVA
KNJIGA XXVIII****Autori radova:**

Andrea Mirjanić	Lazar Lukačević
Teo Mudrić	Ena Škreblin
Sara Grbčić Erdelj	Paulo Šćulac
Gordan Jelenić	Vita Veljačić
Dragan Ribarić	Leo Škec
Stjepan Šimić	Dragan Ribarić
Goran Volf	Iva Mrak
Maja Kekez	Koraljka Bajčić
Nino Krvavica	Denis Ambruš
Ivan Jurčević	Laura Grbac
Vanja Travaš	Anđela Janković
Andrina Mišan	Mateo Ljubić
Natalija Bede Odorčić	Nina Čeh
Elvis Žic	Melchior Gnadekpa
Lucija Žagrić	Ante Džolan
Dino Pršić	Ksenija Tijanić Štok
Paulina Krolo	Tanja Polanc
Josip Malčić	

Autori priloga:

Martina Vivoda Prodan	Željko Arbanas
Mladen Bulić	Elvis Žic
Nilda Zelenika	

PREDGOVOR

U Knjizi XXVIII Zbornika radova Građevinskog fakulteta u Rijeci nastavlja se dugogodišnja tradicija objavljivanja znanstvenih i stručnih radova nastavnika i studenata Fakulteta te drugih znanstvenika i stručnjaka iz područja djelatnosti Fakulteta. Izdanje zadržava prepoznatljivi dvodijelni format – prvi dio sadrži znanstvene i stručne radove, dok je drugi dio posvećen Fakultetskom godišnjaku u kojem su istaknuti studenti koji su diplomirali, nagrađeni studenti i djelatnici, novozaposleni znanstveno-nastavni djelatnici te nove tvrtke u stručnoj bazi. Ovim se godišnjakom ujedno prisjećamo i profesora koji je ostavio neizbrisiv trag u radu Fakulteta.

U pripremi Knjige XXVIII sudjelovao je ukupno 35 autora radova, sedam autora priloga te 32 recenzenata. Svi objavljeni radovi recenzirani su od strane najmanje dvoje znanstvenika ili stručnjaka iz odgovarajućih područja rada – djelatnika Sveučilišta u Rijeci, građevinskih fakulteta i drugih visokoobrazovnih institucija u Republici Hrvatskoj, izabranih u znanstvena zvanja te priznatih stručnjaka iz lokalne i šire akademske i gospodarske zajednice. Sukladno dosadašnjoj praksi, radovi su klasificirani prema Univerzalnoj decimalnoj klasifikaciji (UDK), a svaki rad ima i svoj DOI broj. Zbornik je tiskan u crno-bijeloj tehnici, dok je cjelokupan tekst s izvornim ilustracijama u boji dostupan na mrežnoj stranici Fakulteta te na portalu znanstvenih časopisa Republike Hrvatske – Hrčak.

U ovom je izdanju Zbornika objavljeno ukupno 15 znanstvenih i stručnih radova, od čega pet stručnih i deset znanstvenih. Dva rada objavljena su na engleskom jeziku, dok su ostali na hrvatskom jeziku, uz naslove, sažetke i popise ključnih riječi na oba jezika. Zastupljenost različitih znanstvenih grana i struke potvrđuje široki interes autora. Radovi pripadaju području tehničkih znanosti – sedam radova iz polja građevinarstva, sedam iz polja temeljnih tehničkih znanosti te jedan iz polja arhitekture i urbanizma.

Zbornik predstavlja idealan medij za uvođenje studenata u znanstveno-istraživački rad, potiče ih na daljnje istraživanje i doprinos struci, dok nastavnike motivira na suradnju i zajedničko izdavaštvo sa studentima. Velik broj radova pisan je u koautorstvu studenata završnih godina studija građevinarstva i njihovih mentora, čime se potvrđuje temeljna svrha Zbornika – pružanje mogućnosti studentima da objave svoje prve stručne i znanstvene radove.

Posebno nas raduje što su u nekim od radova obrađene teme laboratorijskih ispitivanja u kojima je korištena oprema laboratorija Fakulteta, nabavljena sredstvima različitih projekata i programa Europske unije, čime se potvrđuje povezanost istraživačke infrastrukture s nastavnim i istraživačkim procesima.

Zahvaljujem svim autorima radova i priloga koji svojim doprinosom iz broja u broj podupiru izdavačku djelatnost našeg Fakulteta, kao i svim recenzentima koji su uložili svoje vrijeme, trud i znanje u realizaciju ovog izdanja. Posebnu zahvalnost upućujem svojoj desnoj ruci, pomoćnom uredniku doc. dr. sc. Paulu Šćulcu, na predanom radu i savjetima. Zahvaljujem i članovima Uredničkog odbora na aktivnoj suradnji u postizanju visoke razine kvalitete radova, tehničkom uredniku Filipu Horvatu, zaslužnom za tehničke i estetske standarde izdanja te lektorici Saši Čohar Mančić na jezičnim korekcijama svih radova i priloga.

Zahvaljujem i svim prethodnim urednicima koji su svojim iskustvom i znanjem doprinijeli kontinuitetu i kvaliteti Zbornika radova Građevinskog fakulteta u Rijeci.

Glavna i odgovorna urednica
Izv. prof. dr. sc. Martina Vivoda Prodan

RIJEČ DEKANA

Poštovane čitateljice i poštovani čitatelji, u ovom XXVIII. izdanju Zbornika radova Građevinskog fakulteta u Rijeci predstavljeni su znanstveni i stručni radovi studenata i djelatnika Fakulteta, kao i radovi drugih znanstvenika i stručnjaka iz akademske zajednice i gospodarstva. U zasebnoj cjelini, Fakultetskom godišnjaku, donose se i prilozi o najznačajnijim događajima i osobama koje su u prethodnoj godini obilježile djelatnost Fakulteta.

Jedan od strateških ciljeva Fakulteta jest povećanje sudjelovanja u kompetitivnim oblicima projektnog financiranja te, posljedično, i povećanje broja objavljenih znanstvenih radova. Fakultet trenutno sudjeluje u nizu znanstvenih projekata financiranih iz različitih izvora, a u suradnji s partnerima iz akademske zajednice i gospodarstva.

Fakultet svojim studentima pruža suvremena znanja i vještine, potiče kreativnost, proaktivnost i kritičko promišljanje te otvorenost prema novim idejama, kako bi se tijekom studija što bolje pripremili za uključivanje u tržište rada, ali i posvetili znanstvenoistraživačkom radu. Objavljivanjem radova u Zborniku nastojimo potaknuti studente na istraživanje, motivirati ih i ohrabriti za bavljenje znanošću, a djelatnike i vanjske stručnjake potaknuti na zajedničko objavljivanje sa studentima. Dio objavljenih radova temelji se na diplomskim i završnim radovima, dok je dio proizašao iz istraživanja provedenih u sklopu znanstvenih projekata.

Posebna je pažnja Fakulteta usmjerena na kontinuiranu modernizaciju studijskih programa na svim razinama, sve kako bi studentima osigurali znanja i vještine usklađene sa suvremenim zahtjevima struke te ih učinili konkurentnima ne samo na hrvatskom, nego i na europskom i svjetskom tržištu rada. U tom kontekstu kontinuirano se unapređuje povezanost nastavnog, znanstvenoistraživačkog i stručnog rada. Unaprjeđenja obuhvaćaju modernizaciju i veću atraktivnost studijskih programa, prilagodbu upisnih uvjeta, uvođenje višestrukog ocjenjivanja i inovativnih metoda poučavanja, povećanje udjela stručne prakse, razvoj mikrokvalifikacija te mjere za poticanje personaliziranog pristupa učenju.

Novi model financiranja putem programskih ugovora zasigurno će dati dodatni zamah razvoju Fakulteta, osobito u području razvoja ljudskih potencijala, jačanja međunarodne vidljivosti, podizanja kvalitete nastave i studentskog iskustva, povećanja znanstvene izvrsnosti te unaprjeđenja suradnje s gospodarstvom.

Na kraju, zahvaljujem svim autorima radova i priloga te svima koji su svojim znanjem, iskustvom i predanim radom doprinijeli pripremi i kvaliteti ovog izdanja Zbornika.

Dekan

Izv. prof. dr. sc. Mladen Bulić

SADRŽAJ

Andrea MIRJANIĆ, Teo MUDRIĆ

Određivanje kritične sile izvijanja za štap skokovito promjenjivog poprečnog presjeka metodom konačnih razlika i analitičkim pristupom11

Sara GRBČIĆ ERDELJ, Gordan JELENIĆ, Dragan RIBARIĆ

Triangular 2D linked interpolation finite elements for micropolar continuum29

Stjepan ŠIMIĆ, Goran VOLF

Idejno rješenje sustava odvodnje naselja Drivenik47

Maja KEKEZ, Nino KRVAVICA

Dimenzioniranje armiranobetonskog obalnog zida T presjeka prema Eurokodu 763

Ivan JURČEVIĆ i Vanja TRAVAŠ

Procjena stvarnih i neizbježnih gubitaka u vodoopskrbnim sustavima79

Andrina MIŠAN, Natalija BEDE ODORČIĆ

Eksperimentalno istraživanje utjecaja superplastifikatora na svojstva morta93

Elvis ŽIC, Lucija ŽAGRIĆ, Dino PRŠIĆ

Primjena računalne dinamike fluida u analizi fizikalnih, kemijskih i bioloških procesa pročišćavanja otpadnih voda109

Paulina KROLO, Josip MALČIĆ, Lazar LUKAČEVIĆ

Nosivost T-spoja sa samonareznim vijcima u tankostjenim C-profilima127

Ena ŠKREBLIN, Paulo ŠĆULAC

Parametarska analiza prevrtanja zida pročelja izvan ravnine143

Vita VELJAČIĆ, Leo ŠKEC, Dragan RIBARIĆ

Analitičko rješenje za dvoslojnu gredu s popustljivim veznim slojem primijenjeno u analizi termalnih efekata kod lameliranog stakla155

Iva MRAK, Koraljka BAJČIĆ, Denis AMBRUŠ

**Građevinska infrastruktura u funkciji turizma – na primjeru
Opatije173**

Laura GRBAC, Gordan JELENIĆ

**Vibration analysis of 2D micropolar continuum using enhanced
fixed-pole interpolation.187**

Anđela JANKOVIĆ, Mateo LJUBIĆ, Nina ČEH, Leo ŠKEC

**Numerička i eksperimentalna analiza dinamičkog odgovora
blokorskog portala s elastičnim vezivom207**

Melchior GNADEKPA, Ante DŽOLAN

Analiza mehaničkih svojstava betona ojačanog vlaknima.223

Ksenija TIJANIĆ ŠTROK, Tanja POLANC

**Promjene cijena armiranobetonskih radova u Republici Hrvatskoj:
analiza na primjeru projekta obiteljske kuće.239**

FAKULTETSKI GODIŠNJAK

Studenti koji su diplomirali256

Nagrade i priznanja studentima259

Nagrade i priznanja djelatnicima.262

Novi znanstveno-nastavni djelatnici.264

In memoriam.272

**Predstavljanje tvrtki iz Stručne baze
Sveučilišta u Rijeci – Građevinski fakultet275**

ODREĐIVANJE KRITIČNE SILE IZVIJANJA ZA ŠTAP SKOKOVITO PROMJENJIVOG POPREČNOG PRESJEKA ANALITIČKIM PRISTUPOM I METODOM KONAČNIH RAZLIKA

COMPUTATION OF EULER'S CRITICAL BUCKLING LOAD FOR A ROD WITH STEPWISE VARYING CROSS-SECTION USING ANALYTICAL APPROACH AND THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Teo Mudrić*, Andrea Mirjanić*

Sažetak

U radu se određuje Eulerova kritična sila izvijanja štapova skokovito promjenjivog poprečnog presjeka primjenom analitičke metode i metode konačnih razlika. Usporedbom rezultata utvrđeno je da numerička metoda daje nešto niže, konzervativne vrijednosti kritične sile. Rezultati rada predstavljaju doprinos u analizi izvijanja elemenata složene geometrije i mogu poslužiti za validaciju numeričkih modela.

Ključne riječi: kritična sila, izvijanje, skokovito promjenjiv poprečni presjek, analitička metoda, metoda konačnih razlika

Abstract

This paper presents the computation of Euler's critical buckling load for rods with stepwise varying cross-section using both an analytical method and the finite difference method. A comparison of results shows that the numerical method yields slightly lower, conservative values. The results contribute to the analysis of buckling in geometrically complex elements and can be used to validate numerical models.

Key words: critical load, buckling, stepwise varying cross-section, analytical method, finite difference method

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
E-mail: {teo.mudric2, amirjanic}@gradri.uniri.hr

1. Uvod

Problem izvijanja štapnih elemenata izuzetno je važan u inženjerskoj praksi, jer se kod tankih i vitkih elemenata kritična sila izvijanja često javi prije granice čvrstoće materijala. Izvijanje je oblik gubitka stabilnosti štapnog elementa koji nastupa kada djelovanje tlačne sile uzrokuje naglo savijanje štapa iz ravnog položaja. Tlačna sila koja izaziva izvijanje naziva se kritična sila izvijanja F_{kr} . Kada centrična tlačna sila dosegne vrijednost te kritične sile, štap prelazi iz stabilnog u labilno stanje, što može dovesti do naglog povećanja deformacija i narušavanja nosivosti. Kako bi se to izbjeglo, potrebno je odrediti kritičnu silu za promatrani element, umanjiti je za odgovarajući koeficijent sigurnosti, i utvrditi da je stvarna uzdužna sila manja od te vrijednosti [1]. Kritična sila se umanjuje koeficijentom sigurnosti zbog nesavršenosti izvedbe, nehomogenosti materijala i mogućih ekscentriciteta tlačne sile. Eulerova teorija izvijanja pruža temelj za analizu takvih problema, pri čemu se kritična sila izvijanja određuje na temelju geometrijskih i materijalnih svojstava štapa te uvjeta oslanjanja [1]-[3].

U ovom radu istražuje se ponašanje štapa sa skokovito promjenjivim poprečnim presjekom, tj. štapa kod kojeg dolazi do nagle promjene savojne krutosti na jednoj ili više točaka duž njegove duljine. Takva geometrijska konfiguracija javlja se u praksi, primjerice kod elemenata modularnih čeličnih konstrukcija te kod spojeva različitih presjeka u armiranobetonskim konstrukcijama, gdje se zbog različitih zahtjeva projektiraju segmenti različitih dimenzija. Proučavanje izvijanja kod ovakvih elemenata važno je radi točne procjene nosivosti i sigurnosti konstrukcije.

Analizirani štap je homogen i izrađen od istog materijala duž cijele duljine. Pretpostavljeno je da je poprečni presjek kružnog oblika, pa se za moment površine drugog reda koristi oznaka I , dok se za savojnu krutost koristi EI , gdje je E modul elastičnosti. Budući da je kod kružnog presjeka moment površine drugog reda jednak u svim smjerovima, u ovom radu se podrazumijeva da se izvijanje događa oko bilo koje osi, te je $I = I_{min}$. U slučaju da bi presjek bio npr. pravokutan, bilo bi nužno koristiti I_{min} , odnosno moment površine drugog reda oko najslabije osi. U svim primjerima promjena presjeka događa se skokovito, pri čemu je poprečni presjek unutar svakog segmenta konstantan. Promjene se javljaju na polovini ili trećinama duljine nosača. U analiziranim slučajevima pretpostavlja se da se izvijanje događa u ravnini s konstantnom osi savijanja. Rubni uvjeti odgovaraju slobodno oslonjenom štapu, tj. oba kraja štapa su globno učvršćena.

U radu su primijenjene dvije metode:

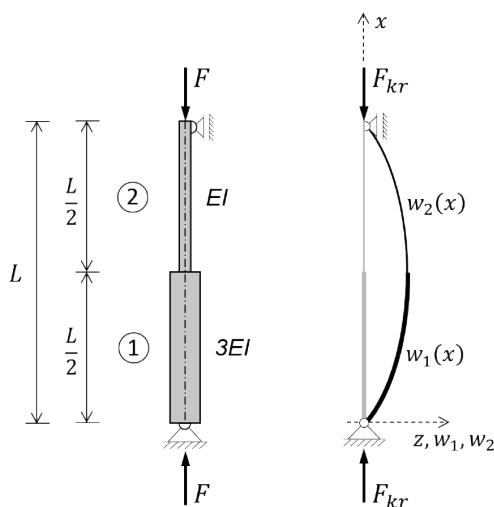
- *Analitička metoda (statički pristup)*, pri kojoj se rješava diferencijalna jednačba ravnoteže savijenog štapa uz zadane rubne uvjete i uvjete kontinuiteta, te se kritična sila određuje iz uvjeta postojanja netrivialnog rješenja sustava [1],[2].
- *Metoda konačnih razlika*, kao numerički pristup, gdje se kontinuirana jednačba aproksimira diskretnim izrazima [4], te se rješenje dobiva traženjem nule determinante matrice koeficijenata [1].

Obje metode primijenjene su na dva slučaja: štap s dva različita poprečna presjeka i štap s tri različita poprečna presjeka. Dobiveni rezultati uspoređeni su kako bi se ocijenila točnost i konzervativnost numeričkog rješenja u odnosu na analitičko.

2. Eulerova kritična sila izvijanja – statička metoda

2.1 Štap s dva različita poprečna presjeka

Za štap prikazan na Slici 1 odredit ćemo kritičnu silu izvijanja statičkom metodom. Ovaj pristup se sastoji od određivanja analitičkog rješenja jednačbe koja daje vezu između momenta savijanja i zakrivljenosti progibne linije, uz pretpostavku malih progiba [5]. Momentnu funkciju zapisujemo na deformiranom sustavu, a zakrivljenost, zbog pretpostavke malih progiba, aproksimiramo s drugom derivacijom funkcije probne linije [1].



Slika 1. Lijevo: skica nosača s dva različita poprečna presjeka. Desno: statička shema nosača s koordinatnim sustavom i deformirana os nosača s označenim funkcijama progiba za dijelove 1 i 2.

Štap na Slici 1 slobodno je oslonjen i ima dva različita poprečna presjeka. Na segmentu $[0, L/2]$ (označen s 1) poprečni presjek nosača ima savojnu krutost $3EI$ (E -modul elastičnosti, I -moment površine drugog reda), dok ona iznosi EI na segmentu $[L/2, L]$ (označen s 2). Na udaljenosti $L/2$ dolazi do skokovite promjene poprečnog presjeka.

Na segmentu 1 progibnu liniju označiti ćemo s $w_1 = w_1(x)$, a na segmentu 2 ona ima oznaku $w_2 = w_2(x)$. Za prvi i drugi dio nosača veza momenta savijanja i progibne linije dana je sljedećim diferencijalnim jednačbama:

$$w_1'' = -\frac{F \cdot w_1}{3EI} \quad (1)$$

$$w_2'' = -\frac{F \cdot w_2}{EI} \quad (2)$$

Uvođenjem supstitucije:

$$\alpha^2 = \frac{F}{3EI} \quad (3)$$

Jednačbe (1) i (2) postaju:

$$w_1'' + \alpha^2 w_1 = 0 \quad (4)$$

$$w_2'' + 3\alpha^2 w_2 = 0 \quad (5)$$

Dobivene su dvije homogene diferencijalne jednačbe drugog reda za koje su opća rješenja dana kao:

$$w_1(x) = A_1 \sin(\alpha x) + B_1 \cos(\alpha x) \quad (6)$$

$$w_2(x) = A_2 \sin(\sqrt{3}\alpha x) + B_2 \cos(\sqrt{3}\alpha x) \quad (7)$$

Ova rješenja moraju zadovoljavati dva rubna uvjeta i dva uvjeta kontinuiteta:

- *rubni uvjeti*

$$w_1(0) = 0 \quad (8)$$

$$w_2(L) = 0 \quad (9)$$

- *uvjeti kontinuiteta*

$$w_1(L/2) = w_2(L/2) \quad (10)$$

$$w_1'(L/2) = w_2'(L/2) \quad (11)$$

Derivacije funkcija w_1 i w_2 su:

$$w_1'(x) = \alpha A_1 \cos(\alpha x) - \alpha B_1 \sin(\alpha x) \quad (12)$$

$$w_2'(x) = \sqrt{3}\alpha A_2 \cos(\sqrt{3}\alpha x) - \sqrt{3}\alpha B_2 \sin(\sqrt{3}\alpha x) \quad (13)$$

Iz uvjeta (8) dobiva se:

$$B_1 = 0 \quad (14)$$

Iz (14) i preostalih uvjeta dobivamo tri jednadžbe koje se u matričnom obliku mogu zapisati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\sqrt{3}\alpha L) & \cos(\sqrt{3}\alpha L) \\ \sin\left(\alpha\frac{L}{2}\right) & -\sin\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) & -\cos\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) \\ \cos\left(\alpha\frac{L}{2}\right) & -\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) & +\sin\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ili skraćeno:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (16)$$

gdje $\mathbf{C} = [A_1 \ A_2 \ B_2]^T$, $\mathbf{0}$ je nul-vektor, a $\mathbf{A}$ je matrica koeficijenata u sustavu (15). Trivijalno rješenje, u kojem su $A_1 = A_2 = B_2 = 0$, odgovara ravnom obliku štapa (funkcije progiba su nula), međutim, nas zanima rješenje za koje je progib različit od nule. Stoga, da bi sustav imao rješenje različito od trivijalnog, determinanta koeficijenata mora biti jednaka nuli [6]:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (17)$$

Razvojem determinante dobiva se transcendentna jednadžba u kojoj nam je αL nepoznato, a iz rješenja jednadžbe (17) dobivamo iznos kritične sile izvijanja. U promatranom slučaju dobivamo trigonometrijsku jednadžbu koja ima više korijena, a najmanji korijen je dobiven primjenom Newtonove metode [7]. Tražen je najmanji korijen jer se iz njega dobiva najmanja vrijednost kritične sile izvijanja, što je u praktičnom smislu mjerodavna vrijednost. Najmanje rješenje koje zadovoljava determinantu (17) je:

$$\alpha L = 2,1596 \quad (18)$$

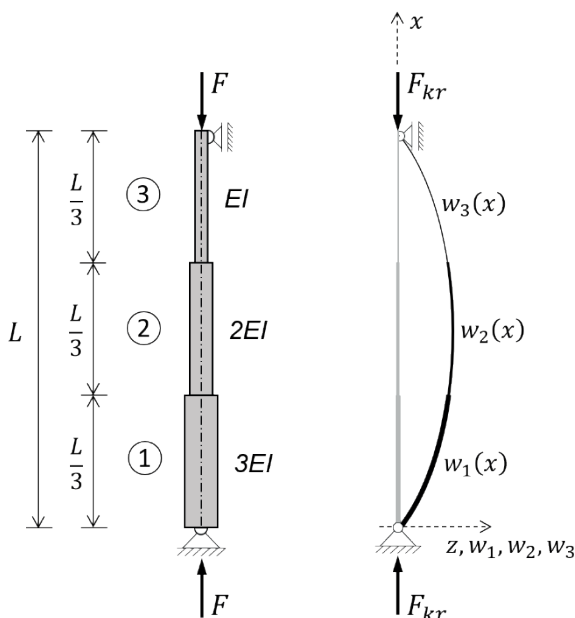
Primjenom supstitucije (3) dobiva se iznos kritične sile:

$$F_{kr} = \frac{13,9916EI}{L^2} \quad (19)$$

Za ovu vrijednost uzdužne sile, pored ravnog oblika štapa, mogući su i ravnotežni položaji u kojima štap poprima savijeni oblik (Slika 1).

2.2 Štap s tri različita poprečna presjeka

Sljedeći primjer odnosi se na slobodno oslonjen štap duljine L i s tri različita poprečna presjeka. Promjena presjeka događa se skokovito na trećinama duljine štapa, a među njima su presjeci konstantni. Analizirani primjer prikazan je na Slici 2 na kojoj su dane oznake segmenata, odnosi savojnih krutosti i oznake progibnih funkcija. Progib segmenta i označen je funkcijom $w_i(x) = w_i$ za $i = \{1, 2, 3\}$. Savojne krutosti segmenata 1, 2 i 3 su redom $3EI$, $2EI$ i EI .



Slika 2. Lijevo: skica nosača s tri različita poprečna presjeka. Desno: statička shema nosača s koordinatnim sustavom i deformirana os nosača s označenim funkcijama progiba za dijelove 1, 2 i 3.

Iz veze druge derivacije progiba i momentne funkcije za svaki segment, slijede tri diferencijalne jednačbe, od kojih svaka vrijedi na pojedinom segmentu:

$$w_1'' + \alpha^2 w_1 = 0 \quad (20)$$

$$w_2'' + 1,5\alpha^2 w_2 = 0 \quad (21)$$

$$w_3'' + 3\alpha^2 w_3 = 0 \quad (22)$$

U prethodnim jednačbama α je dano kao:

$$\alpha^2 = \frac{F}{3EI} \quad (23)$$

Opća rješenja jednadžbi (20), (21) i (22) su:

$$w_1(x) = A_1 \sin(\alpha x) + B_1 \cos(\alpha x) \quad (24)$$

$$w_2(x) = A_2 \sin(\sqrt{1,5}\alpha x) + B_2 \cos(\sqrt{1,5}\alpha x) \quad (25)$$

$$w_3(x) = A_3 \sin(\sqrt{3}\alpha x) + B_3 \cos(\sqrt{3}\alpha x) \quad (26)$$

Derivacije funkcija progiba su:

$$w'_1(x) = \alpha A_1 \cos(\alpha x) - \alpha B_1 \sin(\alpha x) \quad (27)$$

$$w'_2(x) = \sqrt{1,5}\alpha A_2 \cos(\sqrt{1,5}\alpha x) - \sqrt{1,5}\alpha B_2 \sin(\sqrt{1,5}\alpha x) \quad (28)$$

$$w'_3(x) = \sqrt{3}\alpha A_3 \cos(\sqrt{3}\alpha x) - \sqrt{3}\alpha B_3 \sin(\sqrt{3}\alpha x) \quad (29)$$

Iznos kritične sile dobivamo iz rubnih uvjeta i uvjeta kontinuiteta. Za promatrani primjer imamo dva rubna uvjeta i četiri uvjeta kontinuiteta:

- *rubni uvjeti*

$$w_1(0) = 0 \quad (30)$$

$$w_3(L) = 0 \quad (31)$$

- *uvjeti kontinuiteta*

$$w_1\left(\frac{L}{3}\right) = w_2\left(\frac{L}{3}\right) \quad (32)$$

$$w'_1\left(\frac{L}{3}\right) = w'_2\left(\frac{L}{3}\right) \quad (33)$$

$$w_2\left(\frac{2L}{3}\right) = w_3\left(\frac{2L}{3}\right) \quad (34)$$

$$w'_2\left(\frac{2L}{3}\right) = w'_3\left(\frac{2L}{3}\right) \quad (35)$$

Iz uvjeta (30) dobiva se:

$$B_1 = 0 \quad (36)$$

Uvođenjem sljedećih oznaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sin\left(\frac{\alpha L}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \\ \cos\left(\frac{\alpha L}{3}\right) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \\ 0 & \sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$(nastavak) \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}\alpha L) & \cos(\sqrt{3}\alpha L) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) & -\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) \\ -\sqrt{3}\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) & \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [A_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad A_3 \quad B_3]^T \quad (38)$$

i uz primjenu jednadžbe (36), uvjete (30), (32)-(35) možemo zapisati u skraćenom obliku kao:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (39)$$

Zanima nas netrivialno rješenje, a ono postoji ako je zadovoljen uvjet da je determinanta matrice $\mathbf{A}$ jednaka nuli:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (40)$$

Razvojem gornje determinante dobivamo složenu trigonometrijsku jednadžbu, za koju je najmanje rješenje dobiveno numerički Newtonovom metodom:

$$\alpha L = 4,105098 \quad (41)$$

odakle se, uz primjenu supstitucije (23), dobiva Eulerova kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{16,8518EI}{L^2} \quad (42)$$

Za ovu vrijednost uzdužne sile, pored ravnog oblika štapa, mogući su i ravnotežni položaji u kojima štap poprima savijeni oblik (Slika 2).

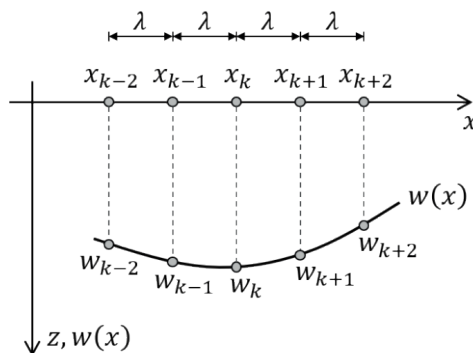
3. Eulerova kritična sila izvijanja – metoda konačnih razlika

Osnova ideja metode konačnih razlika (MKR) je ta da funkciju promatramo u diskretnim točkama (čvorovima), a njezine derivacije u tim točkama aproksimiramo centralnim razlikama. U našem slučaju, funkcija koju promatramo predstavlja progib nosača i ovisi samo o položaju uzduž osi nosača, pa je to funkcija jedne varijable. Stoga, do diskretnih točaka dolazimo tako da podijelimo nosač na konačan broj segmenata, a diskretne točke nalaze se između (na dodiru) segmenata.

Na Slici 3 prikazana je proizvoljna funkcija progiba nosača zajedno s čvornim točkama i podjelom domene na segmente (konačne duljine). Duljina segmenta označena je s λ , a vrijednost funkcije u nekom čvoru x_k označena je s $w_k = w(x_k)$. Prvu i drugu derivaciju funkcije u čvornoj točki x_k aproksimiramo na sljedeći način [4]:

$$w'_k \approx \frac{1}{2\lambda}(w_{k+1} - w_{k-1}) \quad (43)$$

$$w''_k \approx \frac{1}{\lambda^2}(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) \quad (44)$$

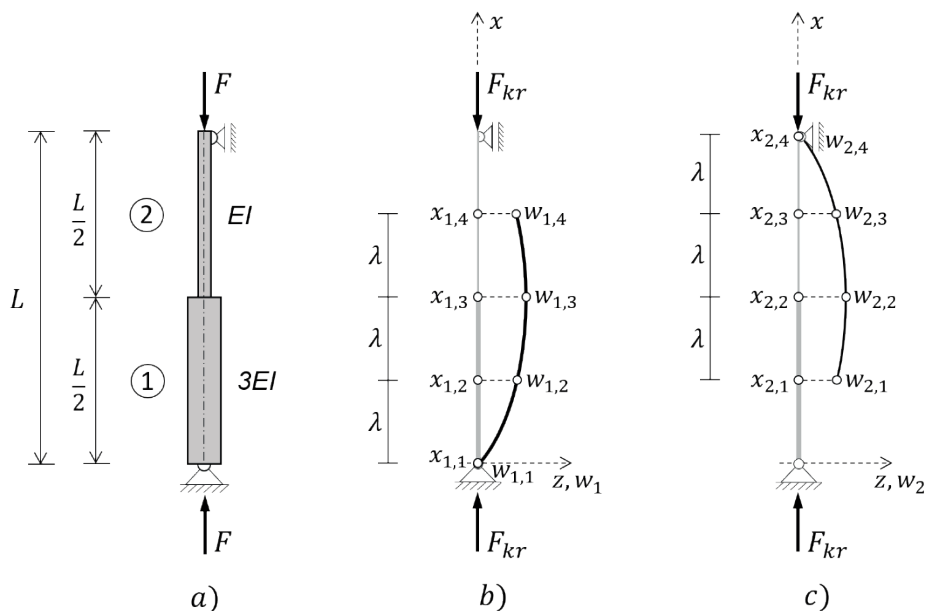


Slika 3. Proizvoljna funkcija progiba $w(x)$, čvorne točke x_k , te duljine segmenata λ .

3.1 Štap s dva različita poprečna presjeka

Promatramo štap za koji smo u odjeljku 2.1 odredili izraz za Eulerovu kritičnu silu statičkom metodom. Na Slici 4 prikazan je promatrani štap, podjela na konačne duljine, te čvorne točke. Duljina svake konačne duljine iznosi $\lambda = L/4$. Korištena je diskretizacija koja ima dvije konačne duljine za svaki dio nosača. Položaji čvornih točaka na nosaču imaju oznaku $x_{i,k}$, gdje je i broj segmenta nosača, a k je redni broj točke na pripadajućem

dijelu nosača. Metodu konačnih razlika primijenit ćemo na jednadžbe (4) i (5). Primijetimo na Slici 4 da su domene funkcija $w_1(x)$ i $w_2(x)$ zasebno diskretizirane te da svaka čvorna točka pripada samo jednoj od tih funkcija. Nadalje, možemo primijetiti da je nakon dijela 1 dodana jedna dodatna točka ($x_{1,4}$) koja pripada samo funkciji $w_1(x)$, a prije dijela 2 dodana je točka ($x_{2,1}$) koja se odnosi samo na funkciju $w_2(x)$. Ove su točke dodane da bi mogli za svaku od dviju funkcija zapisati zakrivljenost na sredini nosača te kako bi mogli reproducirati diskontinuitet u zakrivljenosti funkcije progiba, tj. u njezinoj drugoj derivaciji. Pomak funkcije progiba $w_i(x)$ (za $i = \{1, 2\}$) u točki $x_{i,k}$ označavat ćemo sa $w_i(x_{i,k}) = w_{i,k}$.



Slika 4. a) skica nosača s dva poprečna presjeka, b) podjela na diskretne točke za dio 1 i konačne duljine λ , c) podjela na diskretne točke za dio 2 i konačne duljine λ .

Sada, primjenom izraza (44) diferencijalnu jednadžbu (4), umjesto za cijelu domenu (dio 1), možemo zapisati u čvornim točkama. Zapis diferencijalne jednadžbe (4) u diferencijskom obliku u čvornim točkama $x_{1,2}$ i $x_{1,3}$ je:

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_{1,1} - 2w_{1,2} + w_{1,3}) + \alpha^2 w_{1,2} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_{1,2} - 2w_{1,3} + w_{1,4}) + \alpha^2 w_{1,3} = 0 \quad (46)$$

Na isti način, primjenom izraza (43), diferencijalnu jednadžbu (5) zapisujemo u diferencijalnom obliku u točkama $x_{2,2}$ i $x_{2,3}$ kao:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,1} - 2w_{2,2} + w_{2,3}) + 3\alpha^2 w_{2,2} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,2} - 2w_{2,3} + w_{2,4}) + 3\alpha^2 w_{2,3} = 0 \quad (48)$$

Preoblikovanjem jednadžbi (47)-(48) dobivamo:

$$w_{1,1} + (\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{1,2} + w_{1,3} = 0 \quad (49)$$

$$w_{1,2} + (\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{1,3} + w_{1,4} = 0 \quad (50)$$

$$w_{2,1} + (3\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{2,2} + w_{2,3} = 0 \quad (51)$$

$$w_{2,2} + (3\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{2,3} + w_{2,4} = 0 \quad (52)$$

Rubne uvjete i uvjete kontinuiteta (8)-(11) u diferencijalnom obliku možemo zapisati na sljedeći način:

$$w_{1,1} = 0 \quad (53)$$

$$w_{2,4} = 0 \quad (54)$$

$$w_{1,3} = w_{2,2} \quad (55)$$

$$\frac{1}{2\lambda}(w_{1,4} - w_{1,2}) = \frac{1}{2\lambda}(w_{2,3} - w_{2,1}) \quad (56)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta u jednadžbe (49)-(52) (pri čemu je iz (56) izražen $w_{2,4}$) slijedi u matičnom obliku:

$$\begin{bmatrix} (\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 2 & (\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 1 & -1 \\ 0 & (3\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (3\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

ili u kompaktnom zapisu:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (58)$$

gdje $\mathbf{D}$ matrica koeficijenata, a $\mathbf{W}$ vektor nepoznatih pomaka u čvornim točkama. Zanima nas netrivialno rješenje, iz čega slijedi da mora vrijediti:

$$\det(\mathbf{D}) = 0 \quad (59)$$

Razvojem ove determinante dobivamo polinomnu jednadžbu petog stupnja u kojem je nepoznanica umnožak $\alpha\lambda$. Najmanje pozitivno realno rješenje jednadžbe dobiveno je primjenom Newtonove metode:

$$\alpha^2 \lambda^2 = 0,27924 \quad (60)$$

odakle se, uz primjenu supstitucije (3) i supstitucije $\lambda = L/4$, dobiva Eulerova kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{13,40352EI}{L^2} \quad (61)$$

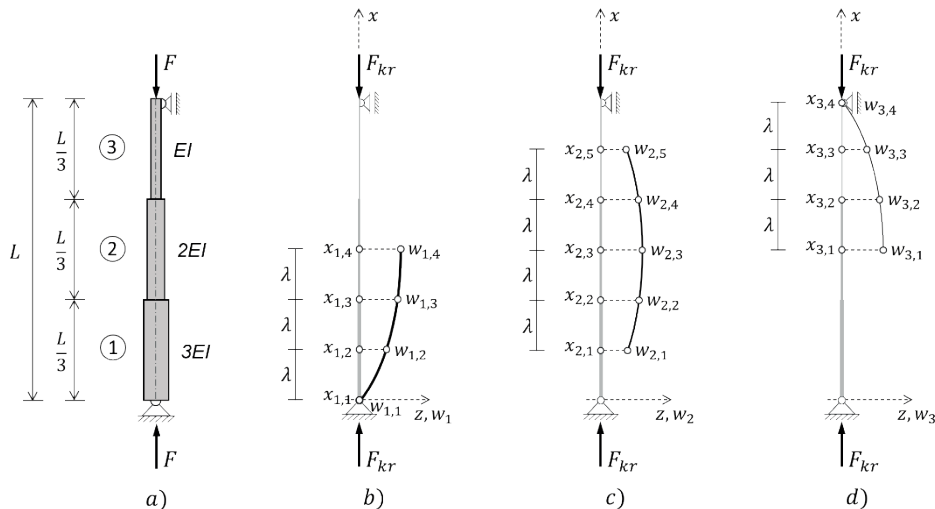
Greška u odnosu na analitičko rješenje koje slijedi iz statičke metode je:

$$\text{Greška} = \frac{13,4035 - 13,9916}{13,9916} \cdot 100\% = -4,2\% \quad (62)$$

Numeričko rješenje dobiveno metodom konačnih razlika za korak $\lambda = L/4$ je za 4,2 % manje od rješenja dobivenog statičkom metodom.

3.2 Štap s tri različita poprečna presjeka

Na Slici 5 prikazan je štap s tri različita poprečna presjeka te je dan odnos savojnih krutosti. Također, naznačena je podjela na konačne duljine i pripadajuće čvorne točke. Analiziran je isti primjer kao i u odjeljku 2.2, a u kojem je kritična sila dobivena statičkom metodom. Duljina svakog konačnog segmenta u odabranoj diskretizaciji iznosi $\lambda = L/6$. Kao i u prethodnom primjeru, korištena je diskretizacija koja daje dvije konačne duljine na svakom dijelu nosača.



Slika 5. a) skica nosača s tri poprečna presjeka, b) podjela na diskretne točke za dio 1 i konačne duljine λ , c) podjela na diskretne točke za dio 2 i konačne duljine λ , d) podjela na diskretne točke za dio 3 i konačne duljine λ .

Metodu konačnih razlika primijenit ćemo na jednadžbe (20), (21) i (22). Uz unutarnje rubove pojedinih dijelova nosača dodana je po jedna točka za pripadajuću funkciju progiba (Slika 5). Na taj način, na rubu svakog od tri segmenata moguće je izraziti različite zakrivljenosti za različite segmente nosača. Sada, primjenom izraza (44), diferencijalnu jednadžbu (20), umjesto za cijelu domenu (dio 1), možemo zapisati u čvornim točkama. Zapis diferencijalne jednadžbe (20) u diferencijskom obliku u čvornim točkama $x_{1,2}$ i $x_{1,3}$ je:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{1,1} - 2w_{1,2} + w_{1,3}) + \alpha^2 w_{1,2} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{1,2} - 2w_{1,3} + w_{1,4}) + \alpha^2 w_{1,3} = 0 \quad (64)$$

Istim postupkom jednadžba (21) u diferencijskom obliku za točke $x_{2,2}$, $x_{2,3}$ i $x_{2,4}$ glasi:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,1} - 2w_{2,2} + w_{2,3}) + 1,5\alpha^2 w_{2,2} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,2} - 2w_{2,3} + w_{2,4}) + 1,5\alpha^2 w_{2,3} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,3} - 2w_{2,4} + w_{2,5}) + 1,5\alpha^2 w_{2,4} = 0 \quad (67)$$

Za dio 3 diferencijski oblik jednadžbe (22) u pripadnim čvornim točkama jest:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{3,1} - 2w_{3,2} + w_{3,3}) + 3\alpha^2 w_{3,2} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{3,2} - 2w_{3,3} + w_{3,4}) + 3\alpha^2 w_{3,3} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{3,3} - 2w_{3,4} + w_{3,5}) + 3\alpha^2 w_{3,4} = 0 \quad (70)$$

Rubni uvjeti i uvjeti kontinuiteti za diskretni sustav su:

- *rubni uvjeti*

$$w_{1,1} = 0 \quad (71)$$

$$w_{3,4} = 0 \quad (72)$$

- *jednakost pomaka na dodiru segmenata 1 i 2, te 2 i 3*

$$w_{1,3} = w_{2,2} \quad (73)$$

$$w_{2,4} = w_{3,2} \quad (74)$$

- jednakost zaokreta poprečnog presjeka na dodiru segmanata 1 i 2, te 2 i 3

$$\frac{1}{2\lambda}(w_{1,4} - w_{1,2}) = \frac{1}{2\lambda}(w_{2,3} - w_{2,1}) \quad (75)$$

$$\frac{1}{2\lambda}(w_{2,5} - w_{2,3}) = \frac{1}{2\lambda}(w_{3,3} - w_{3,1}) \quad (76)$$

Uvođenjem gornjih uvjeta (pri čemu je iz (75) izražen $w_{1,4}$, a iz (76) je izražen $w_{2,5}$) u jednađbe (63)-(70) te grupiranjem članova uz nepoznate pomake slijedi:

$$w_{1,3} + (\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{1,2} = 0 \quad (77)$$

$$2w_{1,2} + w_{2,3} - w_{2,1} + (\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{1,3} = 0 \quad (78)$$

$$w_{2,1} + w_{2,3} + (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{1,3} = 0 \quad (79)$$

$$w_{1,3} + w_{3,4} + (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{2,3} = 0 \quad (80)$$

$$2w_{2,3} + w_{3,3} - w_{3,1} + (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{2,4} = 0 \quad (81)$$

$$w_{3,1} + w_{3,3} + (3\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{2,4} = 0 \quad (82)$$

$$w_{2,4} + w_{3,4} + (3\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{3,3} = 0 \quad (83)$$

Uvođenjem oznaka:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\alpha^2\lambda^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & (\alpha^2\lambda^2 - 2) & -1 & 1 & \dots \\ 0 & (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (84)$$

(nastavak)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) & -1 & 1 \\ (3\alpha^2\lambda^2 - 2) & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (3\alpha^2\lambda^2 - 2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = [w_{1,2} \ w_{1,3} \ w_{2,1} \ w_{2,3} \ w_{2,4} \ w_{3,1} \ w_{3,3}]^T \quad (85)$$

jednađbe (77)-(83) možemo skraćeno zapisati kao:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (86)$$

Netrivijalno rješenje postoji ako je zadovoljen uvjet:

$$\det(\mathbf{D}) = 0 \quad (87)$$

U determinanti (87) nepoznato nam je $\alpha\lambda$. Razvojem determinante te rješavanjem jednadžbe (87) Newtonovom metodom za $\alpha\lambda$ dobivamo:

$$\alpha^2\lambda^2 = 0,151 \quad (88)$$

Primjenom supstitucije (23) i supstitucije $\lambda = L/6$, dobivamo Eulerovu kritičnu silu:

$$F_{kr} = \frac{16,308EI}{L^2} \quad (89)$$

Greška u odnosu na analitičko rješenje koje slijedi iz statičke metode je:

$$Greška = \frac{16,308 - 16,8518}{16,8518} \cdot 100\% = -3,2\% \quad (90)$$

Numeričko rješenje dobiveno metodom konačnih razlika za korak $\lambda = L/6$ je za 3,2 % manje od rješenja dobivenog statičkom metodom.

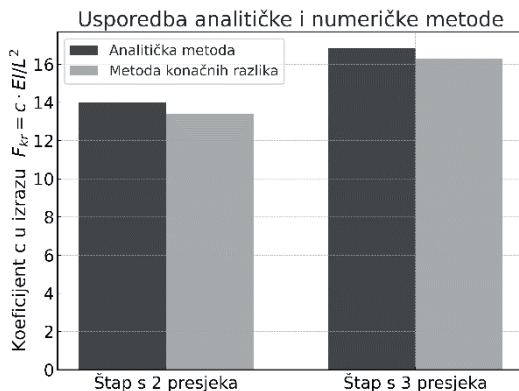
4. Usporedba rezultata i zaključak

U ovom radu analizirana su dva primjera slobodno oslonjenih nosača sa skokovito promjenjivim poprečnim presjekom, opterećenih uzdužnom silom, a cilj je bio odrediti Eulerovu kritičnu silu izvijanja. Kritična sila određena je analitičkom metodom i metodom konačnih razlika, pri čemu je u oba slučaja bilo potrebno formirati sustav algebarskih jednadžbi temeljenih na rubnim uvjetima i uvjetima kontinuiteta.

Dobiveni rezultati pokazuju da metoda konačnih razlika daje nešto niže vrijednosti kritične sile u odnosu na analitičko rješenje, čime se osigurava dodatna razina sigurnosti u praktičnoj primjeni. Za odabranu diskretizaciju s dvije konačne duljine po svakom segmentu nosača odstupanja su bila relativno mala: -4,2 % za nosač s dva presjeka i -3,2 % za nosač s tri presjeka. Takva odstupanja posljedica su aproksimacijske prirode metode jer se kontinuirane derivacije diferencijalnih jednadžbi zamjenjuju konačnim razlikama. Najznačajniji izvor pogreške je odabir duljine segmenta λ : manji koraci poboljšavaju točnost, ali povećavaju broj jednadžbi i složenost pripadne determinante. Dodatni izvori pogreške mogu nastati u formulaciji rubnih uvjeta i uvjeta kontinuiteta koji u praksi

često odstupaju od idealnih. Točnost je moguće poboljšati finijom diskretizacijom ili primjenom aproksimacija višeg reda.

Na Slici 6 prikazana je usporedba analitičkih i numeričkih rezultata.



Slika 6. Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti kritične sile izvijanja F_{kr} .

Važno je istaknuti da matrica sustava jednadžbi u metodi konačnih razlika ima veće dimenzije nego kod statičke metode, ali se njezino sastavljanje može automatizirati, što metodu čini pogodnom za računalnu implementaciju i analizu složenijih sustava.

Vrijednosti kritične sile izvijanja dobivene analitičkom (statičkom) metodom, zahvaljujući jasno definiranim pretpostavkama i točnosti unutar zadanog modela, mogu poslužiti kao referentne vrijednosti za usporedbu s rezultatima dobivenim drugim metodama – bilo numeričkim, eksperimentalnim ili softverskim. Time se dodatno potvrđuje njihova važnost u evaluaciji učinkovitosti i točnosti alternativnih pristupa.

Usporedba rezultata potvrđuje konzistentnost analitičkog i numeričkog pristupa u okviru postavljenih pretpostavki, a rad pruža osnovu za proširenje analize na složenije slučajeve, uključujući veći broj segmenata, nehomogene materijale ili složenije rubne uvjete.

Literatura

- [1] Šimić, V. (1995) Otpornost materijala II. 1. izdanje. Zagreb: Školska knjiga.
- [2] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961) Theory of Elastic Stability. New York (USA): McGraw-Hill.
- [3] Bazant, Z.P., Cedolin, L. (2003) Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. New York (USA): Dover Publications.
- [4] Chapra, S.C., Raymond, P.C. (2015) Numerical Methods for Engineers. 7th edition. New York (USA): McGraw-Hill.
- [5] Šimić, V. (2002) Otpornost materijala I. 2. izdanje. Zagreb: Školska knjiga.

- [6] Elezović, N. (2016) Linearna algebra. 2. izdanje. Zagreb: Element d.o.o.
- [7] Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics. 10th edition. Danvers (USA): John Wiley & Sons, Inc.

TRIANGULAR 2D LINKED-INTERPOLATION FINITE ELEMENTS FOR MICROPOLAR CONTINUUM

TROKUTNI 2D MIKROPOLARNI KONAČNI ELEMENTI S VEZANOM INTERPOLACIJOM

Sara Grbčić Erdelj*, Gordan Jelenić*, Dragan Ribarić*

Abstract

Triangular finite elements for linear micropolar continuum theory are developed using linked interpolation. In order to satisfy convergence criteria, the newly presented finite elements are modified using the Petrov-Galerkin method, which uses different interpolation for the test and trial functions. The elements are tested through several numerical examples consisting of a set of patch tests, and a stress concentration problem, and compared to the analytical solution and membrane micropolar finite elements with standard Lagrangian interpolation. All the presented elements faithfully reproduce the micropolar effects in the stress concentration analysis, but the enhancement is negligible with respect to standard Lagrangian elements.

Key words: micropolar theory, finite element method, linked interpolation, membrane elements

Sažetak

Razvijena je familija trokutnih konačnih elementa s vezanom interpolacijom kinematičkih polja. Kako bi se zadovoljio kriterij konvergencije konačnog elementa, novi elementi modificirani su Petrov-Galerkinovom aproksimacijom. Elementi su testirani kroz nekoliko numeričkih primjera koji uključuju niz mikropolarnih konvergencijskih testova i problem koncentracije naprezanja. Rezultati su uspoređeni s analitičkim rješenjem i numeričkim rješenjem membranskih mikropolarnih konačnih elemenata sa standardnom Lagrangeovom interpolacijom. Svi predstavljeni elementi vjerno reproduciraju mikropolarne efekte u analizi

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: {sara.grbcic, gordan.jelenic, dragan.ribaric}@gradri.uniri.hr

koncentracije naprezanja, iako je poboljšanje zanemarivo u odnosu na standardne Lagrangeove elemente.

Ključne riječi: mikropolarna teorija, metoda konačnih elemenata, vezana interpolacija, membranski elementi

1. Introduction

The classical Cauchy continuum theory generally yields accurate predictions for homogeneous materials like steel and aluminium, yet discrepancies arise in cases involving granular, fibrous, or lattice structures. Stress concentrations near holes and notches are often overestimated, and size effects are not captured [1,2]. Moreover, the symmetry constraint on the Cauchy stress tensor restricts the applicability of the classical theory. Further mismatches appear in dynamics, thermal analysis, and fluid flow [1]. To address these limitations, various generalized continuum theories have been proposed [3], among which is the micropolar theory, originating from the Cosserat brothers [4]. In the micropolar theory, in addition to the displacement field, an independent microrotational field is introduced leading to the existence of additional curvature couple-stress tensors. The micropolar material response is governed by six independent constants. Despite its theoretical appeal, practical adoption of the micropolar theory remains limited due to difficulties in determining material parameters. Experimental efforts [2,5] have provided partial insights, but further numerical and experimental developments are essential. The key to improving experimental procedures could lie in numerical analysis of boundary value problems. A comprehensive review of available micropolar finite elements is provided in [3]. In this work, we present triangular finite elements for linear micropolar continuum by using the so-called linked interpolation [6] and assess their performance through several benchmark problems.

2. Micropolar continuum model

2.1 Equilibrium equations

In the state of static equilibrium, we have the following force equilibrium equation

$$\boldsymbol{\sigma} \nabla + \mathbf{p}_v = \mathbf{0}, \quad (1)$$

where ∇ is the differential operator nabla, as well as the moment equilibrium equation

$$\boldsymbol{\mu} \nabla + \mathbf{a} + \mathbf{m}_v = \mathbf{0}, \quad (2)$$

where $\mathbf{a}$ is twice the axial vector of the skew-symmetric part $\boldsymbol{\sigma}_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T)$ of the stress tensor, i.e.

$$\mathbf{a} = 2\text{axial}(\boldsymbol{\sigma}_a), \quad (3)$$

defined such that $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\sigma}_a \mathbf{v}$ for any 3D vector $\mathbf{v}$, and $\mathbf{p}_v$, $\mathbf{m}_v$, $\mathbf{p}_s$ and $\mathbf{m}_s$ represent distributed volume and surface force and moment loads, respectively. Attaching a triad of orthogonal base vectors and corresponding Cartesian co-ordinates to the chosen spatial frame of reference, equilibrium equations (1) and (2) may be written as

$$\sigma_{ij,j} + p_{v_i} = 0, \quad \mu_{ij,j} - \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + m_{v_i} = 0, \quad (4)$$

where the first index denotes the direction of the stress or axis of the couple stress with respect to the coordinate base, and the second index denotes the direction of the surface normal. The summation convention on repeated indices is implied, and a comma denotes differentiation with respect to a particular spatial coordinate, while ε_{ijk} is the permutation tensor of Levi-Civita. Likewise, the following natural boundary conditions are defined for the part of the body surface subject to applied loading:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}_s \Leftrightarrow \sigma_{ij} n_j = p_{si}, \quad \boldsymbol{\mu} \mathbf{n} = \mathbf{m}_s \Leftrightarrow \mu_{ij} n_j = m_{si}, \quad (5)$$

where $\mathbf{n}$ is the outward unit normal to the surface, along with the essential boundary conditions on the part of the body surface with prescribed kinematics.

2.2 Kinematic equations

In the micropolar continuum theory we have a displacement field $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ and an additional kinematic field $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ known as the microrotation field which represents the local rotation of the point X and is completely independent the macrorotation of the classical continuum theory. The micropolar strain tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ is defined as

$$\boldsymbol{\epsilon} = \text{grad } \mathbf{w} - \widehat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{w} \otimes \nabla - \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \Leftrightarrow \epsilon_{ij} = w_{i,j} + \varepsilon_{ijk} \varphi_k, \quad (6)$$

where a superimposed hat on a vector field $(\cdot)$ denotes a skew-symmetric cross-product operator such that $\widehat{(\cdot)} \mathbf{v} = (\cdot) \times \mathbf{v}$ for any 3D vector $\mathbf{v}$. Owing to the existence of an independent rotation field $\boldsymbol{\varphi}$, there also exists a corresponding micropolar curvature tensor

$$\boldsymbol{\kappa} = \text{grad } \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} \otimes \nabla \Leftrightarrow \kappa_{ij} = \varphi_{i,j}, \quad (7)$$

where the diagonal terms represent torsional strains. The so-called couple-stress theory is a special case of the micropolar continuum theory, where the microrotation vector $\boldsymbol{\varphi}$ is equal to the macrorotation vector $\boldsymbol{\omega}$ and thus ceases to exist as an independent field.

2.3 Constitutive equations

In a homogeneous isotropic linear elastic micropolar continuum, the stress and couple-stress tensors are related to the strain and curvature tensors, respectively, via constant isotropic fourth-order constitutive tensors, such that in the Cartesian component form we have

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + (\mu + \nu) \epsilon_{ij} + (\mu - \nu) \epsilon_{ji}, \quad (8)$$

$$\mu_{ij} = \alpha \kappa_{pp} \delta_{ij} + (\beta + \gamma) \kappa_{ij} + (\beta - \gamma) \kappa_{ji}, \quad (9)$$

where λ and μ are the Lamé constants, $\nu, \alpha, \beta, \gamma$ are additional material parameters of the linear isotropic micropolar continuum, and δ_{ij} is the Kronecker symbol. The following restrictions on the material parameters hold true as a consequence of positive definiteness of the constitutive tensors: $3\lambda + 2\mu > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, $3\alpha + 2\beta > 0$, $\beta > 0$ and $\gamma > 0$. Note that all the stress and strain tensors are now in general non-symmetric. These material parameters may be related to a set of technical (measurable) parameters consisting of shear modulus G , Poisson's ratio n , a dimensionless coupling number between the microrotation and the microrotation $N \in \langle 0, 1 \rangle$, a dimensionless polar ratio of rotation sensitivity (a quantity which relates the torsional strains in a way analogous to that in which Poisson's ratio relates the normal strains) $\psi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$, and the characteristic lengths for torsion and bending l_t and l_b as

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2nG}{1-2n}, \quad \mu = G, \quad \nu = \frac{GN^2}{1-N^2}, \\ \alpha &= \frac{2Gl_t^2(1-\psi)}{\psi}, \quad \beta = Gl_t^2, \quad \gamma = G(4l_b^2 - l_t^2). \end{aligned} \quad (10)$$

2.4 Weak form of the equilibrium equations

To construct a numerical solution procedure of the boundary value problem analysed, we state that the virtual work of external forces must be equal to the virtual work of the internal forces

$$G^{int}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}; \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) = G^{ext}(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}), \quad (11)$$

with the virtual works of internal and external forces defined as

$$G^{int}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}; \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) = \int_V (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\sigma} + \bar{\boldsymbol{\kappa}} : \boldsymbol{\mu}) dV, \quad (12)$$

$$G^{ext}(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) = \int_V (\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{p}_v + \bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{m}_v) dV - \int_S (\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{p}_s + \bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{m}_s) dS, \quad (13)$$

where $\bar{\mathbf{w}}$ and $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ are the virtual displacement and microrotation vectors and $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ and $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ are the corresponding tensors of virtual micropolar strains

and curvatures, respectively. The algebraic equilibrium equations of the finite element method will be thus obtained after an appropriate interpolation of the kinematic fields and their virtual counterparts has been specified. In the following section, we propose a generalisation of the standard Lagrangian interpolation, which includes the rotational degrees of freedom in the interpolation of the displacement vector - the so-called linked interpolation.

3. Governing equations of a 2D micropolar continuum

In order to develop membrane finite elements, the presented boundary value problem is reduced from 3D to 2D. Consequently, the kinematic fields are in Cartesian coordinates reduced to only two independent displacements $\mathbf{w} = \langle u \ v \ 0 \rangle^T$ and one microrotation $\boldsymbol{\varphi} = \langle 0 \ 0 \ \varphi \rangle^T$, which represents an in-plane (or drilling) rotation. Furthermore, assuming a plane-strain condition, the stress and strain tensors are reduced to $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{21} \ \sigma_{22} \rangle^T$, $\boldsymbol{\mu} = \langle \mu_{31} \ \mu_{32} \rangle^T$ and $\boldsymbol{\epsilon} = \langle \epsilon_{11} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{21} \ \epsilon_{22} \rangle^T$, $\boldsymbol{\kappa} = \langle \kappa_{31} \ \kappa_{32} \rangle^T$ respectively with

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & (\mu + \nu) & (\mu - \nu) & 0 \\ 0 & (\mu - \nu) & (\mu + \nu) & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\epsilon},$$

$$\begin{Bmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta + \gamma) & 0 \\ 0 & (\beta + \gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}_2 \boldsymbol{\kappa}, \quad (14)$$

where $\mathbf{C}_1$ and $\mathbf{C}_2$ stand for the micropolar constitutive tensors. Therefore, the problem is reduced to only four elastic constants λ, μ, ν , and $\beta + \gamma$. The applied loading is likewise reduced to

$$\mathbf{p}_v = \begin{Bmatrix} p_{v1} \\ p_{v2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_v \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m}_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_v \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{p}_s = \begin{Bmatrix} p_{s1} \\ p_{s2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_s \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m}_s = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_s \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

The kinematic equations are reduced to

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} + \varphi \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_u^T \mathbf{u} + \varphi \mathbf{I}_\varphi, \quad (17)$$

while the curvatures are reduced to

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \varphi = \mathbf{D}_\mu^T \varphi. \quad (18)$$

In order to obtain the numerical solution of the problem, the kinematic fields have to be approximated using a chosen type of interpolation. In general, the real and virtual kinematic fields are interpolated as $\mathbf{u}^h = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e$, $\varphi^h = \mathbf{N}_\varphi \mathbf{d}^e$, $\bar{\mathbf{u}}^h = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{d}}^e$, $\bar{\varphi}^h = \mathbf{N}_\varphi \bar{\mathbf{d}}^e$, where $\mathbf{N}_u$ and $\mathbf{N}_\varphi$ represent the matrices of interpolation functions over an element for the displacement and microrotation field, respectively, and $\mathbf{d}^e$ and $\bar{\mathbf{d}}^e$ represent the real and virtual vector of element nodal degrees of freedom, respectively. Superscript h denotes the discretization, while e denotes the element to which the interpolation is applied. After introducing the interpolation and substituting the kinematic and constitutive equations we obtain the interpolated element internal and external virtual works as

$$\begin{aligned} G^{int,e}(\mathbf{d}^e; \bar{\mathbf{d}}^e) &= \bar{\mathbf{d}}^{eT} \int_V (\mathbf{N}_u^T \mathbf{D}_u + \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{I}_\varphi^T) \mathbf{C}_1 (\mathbf{D}_u^T \mathbf{N}_u + \mathbf{I}_\varphi \mathbf{N}_\varphi) dV \mathbf{d}^e + \\ &\quad \bar{\mathbf{d}}^{eT} \int_V (\mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{D}_\varphi) \mathbf{C}_2 (\mathbf{D}_\varphi^T \mathbf{N}_\varphi) dV \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{d}}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e, \quad (19) \\ G^{ext,e}(\bar{\mathbf{d}}^e) &= \bar{\mathbf{d}}^{eT} \int_V (\mathbf{N}_u^T \mathbf{q}_v + \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{m}_v) dV + \bar{\mathbf{d}}^{eT} \int_S (\mathbf{N}_u^T \mathbf{q}_s + \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{m}_s) dS \\ &= \bar{\mathbf{d}}^{eT} \mathbf{f}^e, \end{aligned}$$

where $\mathbf{K}^e$ and $\mathbf{f}^e$ represent the element stiffness matrix and external force vector. The global internal and external virtual works are obtained as

$$\begin{aligned} G^{int}(\mathbf{d}; \bar{\mathbf{d}}) &= \sum_{e=1}^{n_{elem}} G^{int,e}(\mathbf{d}^e; \bar{\mathbf{d}}^e) \equiv \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{K} \mathbf{d}, \quad G^{ext}(\bar{\mathbf{d}}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} G^{ext,e}(\bar{\mathbf{d}}^e) \\ &\equiv \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{f} \end{aligned}$$

with $\mathbf{d}$ and $\bar{\mathbf{d}}$ as the global vectors of real and virtual displacements,

$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{K}^e$ and $\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{f}^e$ as the global stiffness matrix and external

force vector, n_{elem} as the total number of elements in the mesh, and $\mathbb{A}$ as the finite-element assembly operator. Finally, substituting G^{int} and G^{ext} we obtain the approximated weak form. Recognising arbitrariness of $\bar{\mathbf{d}}$, we eventually obtain the basic set of algebraic equations of the finite element method as $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}$.

4. Lagrangian and linked interpolation

In this paper two different interpolations are compared for the family of triangular finite elements. The first one is the conventional Lagrange interpolation, serving to approximate the real and virtual displacements as

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e, \quad \bar{\mathbf{u}}^h = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{d}}^e, \quad (20)$$

and the real and virtual microrotation as

$$\varphi^h = \mathbf{N}_\varphi \mathbf{d}^e, \quad \bar{\varphi}^h = \mathbf{N}_\varphi \bar{\mathbf{d}}^e, \quad (21)$$

with

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{n_{node}} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{n_{node}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \\ \mathbf{N}_\varphi = \langle 0 \quad 0 \quad N_1 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad N_{n_{node}} \rangle,$$

n_{node} as the number of nodes on the element and $N_i (i = 1, \dots, n_{node})$ as the i^{th} Lagrangian polynomial. The second interpolation analysed is the linked interpolation in which the displacement field depends on the nodal microrotation, too. The linked interpolation for the displacement field consists of the conventional Lagrange interpolation (represented by matrix $\mathbf{N}_u$) enhanced by the contribution due to the nodal microrotations. In general, the linked interpolation is therefore given as

$$\mathbf{u}^h = (\mathbf{N}_u + \mathbf{N}_{enh}) \mathbf{d}^e, \quad \bar{\mathbf{u}}^h = (\mathbf{N}_u + \mathbf{N}_{enh}) \bar{\mathbf{d}}^e, \quad (22)$$

where $\mathbf{N}_{enh}$ is the matrix of linked-interpolation enhancement to the Lagrangian interpolation. In the linked-interpolation framework, the microrotations are still interpolated conventionally, as defined in equation (21). The linked interpolation is in [6] derived as the exact solution of differential equations of a 3D Timoshenko beam. For the present purposes let us limit our attention to its 2D form, where the displacement field along the in-plane axis z orthogonal to the centroidal line x of the beam is

$$w = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i w_i - \frac{L}{n_{node}} \sum_{i=1}^{n_{node}} \frac{\xi - \xi_i}{2} N_i \varphi_i, \quad (23)$$

while the rotation field around the out-of-plane axis y orthogonal to the centroidal line is simply

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i \varphi_i, \quad (24)$$

where L is the finite-element length, $\xi \in [-1,1]$ is the natural co-ordinate, n_{node} is the number of nodes on the element, φ_i and w_i are the rotation and the displacement at the i^{th} node, N_i is the i^{th} Lagrange polynomial of order $n_{node} - 1$, ξ_i is the natural co-ordinate of the i^{th} node, and the axes x, y, z form a right-handed co-ordinate system. The displacement field is thus interpolated by a polynomial, one order higher than that used for the rotations. The Lagrangian polynomials are given as

$$N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_{node}} \frac{(\xi_j - \xi)}{(\xi_j - \xi_i)}, \quad i = 1, \dots, n_{node}. \quad (25)$$

In order to generalise the linked interpolation concept presented to 2D micropolar continuum, it is important to note that, in contrast to beams, a closed-form solution of the differential equations does not generally exist for this continuum. The approach that we take is the following: (i) we apply interpolation (23) to the element edges only, i.e. we treat the element edges as beam finite elements and (ii) we average the edge results within the interior of the element depending on the actual position so that that interpolation correctly describes rigid-body motion. To do this, we follow the approach proposed in [7] for the Mindlin plate elements.

4.1 Triangular finite elements

The triangular finite element family with the related shape functions is defined in the natural coordinate system. The mapping from the natural coordinate system (ξ, η) to the Cartesian coordinate system (x, y) is defined as:

$$x = \sum_{a=1}^{n_{node}} N_a(\xi, \eta) x_a, \quad y = \sum_{a=1}^{n_{node}} N_a(\xi, \eta) y_a, \quad (26)$$

where n_{node} stands for the number of element nodes, (x_a, y_a) represent the element nodal coordinates in the Cartesian coordinate system and $N_a(\xi, \eta)$ represent the isoparametric shape functions with arguments ξ, η , which run between $[0,1]$. Here we consider the elements with three, six or ten nodes, with a node-numbering convention as shown in Figure 1.

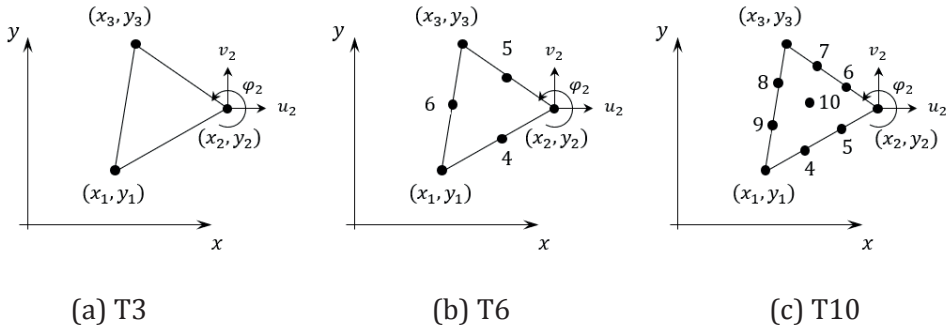


Figure 1. Triangular finite elements of different order

The shape functions are most easily expressed via a set of the so-called area coordinates

$$\zeta_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \zeta_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \zeta_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (27)$$

The triangular shape functions for the edge nodes in Figure 1 taken at the edge halves in T6 and at the edge thirds in T10 and the inner node in T10 in its centroid are given in Table 1. For the Lagrangian family of elements, the same shape functions are used for the interpolation of real and virtual displacements and rotations as given in equations (20) and (21). For the family of elements with linked interpolation, the rotations are still interpolated using the Lagrange polynomials and (21), but in the displacement field we now have an enhancement in the displacement field as shown in equation (22). For the elements of different order, this enhancement is now defined following the approach given in [7].

Table 1. Triangular shape functions

Element	T3	T6	T10
Vertex:	$N_a = \zeta_a$	$N_a = \zeta_a(2\zeta_a - 1)$	$N_a = \frac{1}{2}\zeta_a(3\zeta_a - 1)(3\zeta_a - 2)$
Edge:	-	$N_{i+3} = 4\zeta_i\zeta_j$	$N_{2i+2} = \frac{9}{2}\zeta_i\zeta_j(3\zeta_i - 1)$ $N_{2i+3} = \frac{9}{2}\zeta_i\zeta_j(3\zeta_j - 1)$
Centroid node:	-	-	$N_{10} = 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3$

4.1.1 Triangular membrane element with three nodes (T3LI)

In analogy with the linked interpolation for a beam element (23), when applied to a two-noded beam, we propose the linked interpolation for the triangular element with three nodes and three degrees of freedom per node, named T3LI and shown in Figure 1, such that

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^h &= (\mathbf{N}_u + \mathbf{N}_{enh}) \mathbf{d}^e \\
&= \sum_{a=1}^3 N_a \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \zeta_2 \zeta_3 (\varphi_2 - \varphi_3) \begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \zeta_3 \zeta_1 (\varphi_3 - \varphi_1) \begin{Bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{Bmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \zeta_1 \zeta_2 (\varphi_1 - \varphi_2) \begin{Bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{a=1}^3 N_a \mathbf{u}_a + \begin{Bmatrix} f_{1,x} \\ f_{1,y} \end{Bmatrix} (\varphi_2 - \varphi_3) + \begin{Bmatrix} f_{2,x} \\ f_{2,y} \end{Bmatrix} (\varphi_3 - \varphi_1) + \begin{Bmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{Bmatrix} (\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned} \tag{28}$$

where $f_{i,x} = \frac{1}{2} \zeta_j \zeta_k (y_j - y_k)$, $f_{i,y} = \frac{1}{2} \zeta_j \zeta_k (x_k - x_j)$ and i, j, k is a cyclic permutation of 1,2,3 resulting in $\mathbf{N}_{enh} = [\mathbf{N}_{enh,1} \quad \mathbf{N}_{enh,2} \quad \mathbf{N}_{enh,3}]$, where

$$\mathbf{N}_{enh,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{k,x} - f_{j,x} \\ 0 & 0 & f_{k,y} - f_{j,y} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

4.1.2 Triangular membrane element with six nodes (T6LI)

Now we generalise the linked interpolation of a beam element applied to a three-noded beam to a triangular element with six nodes and three degrees of freedom per node, named T6LI. The displacement interpolation thus follows as

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^h &= (\mathbf{N}_u + \mathbf{N}_{enh}) \mathbf{d}^e = \sum_{a=1}^6 N_a (\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \end{Bmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{3} \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_2 - \zeta_1) (\varphi_1 - 2\varphi_4 + \varphi_2) \begin{Bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{Bmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{3} \zeta_2 \zeta_3 (\zeta_3 - \zeta_2) (\varphi_2 - 2\varphi_5 + \varphi_3) \begin{Bmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{Bmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{3} \zeta_3 \zeta_1 (\zeta_1 - \zeta_3) (\varphi_3 - 2\varphi_6 + \varphi_1) \begin{Bmatrix} y_1 - y_3 \\ x_3 - x_1 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

from where $\mathbf{N}_{enh}$ immediately follows.

4.1.3 Triangular membrane element with ten nodes (T10LI)

Finally, we develop the triangular element with ten nodes shown in Figure 1., which we name T10LI. Generalising the linked interpolation for a beam element applied to a four-node element

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^h = (\mathbf{N}_u + \mathbf{N}_{enh})\mathbf{d}^e = \sum_{a=1}^{10} N_a(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \end{Bmatrix} + \\
+ \frac{1}{8} \zeta_1 \zeta_2 (3\zeta_1 - 1)(3\zeta_2 - 1) \begin{Bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{Bmatrix} (\varphi_1 - 3\varphi_4 + 3\varphi_5 - \varphi_2) + \\
+ \frac{1}{8} \zeta_2 \zeta_3 (3\zeta_2 - 1)(3\zeta_3 - 1) \begin{Bmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{Bmatrix} (\varphi_2 - 3\varphi_6 + 3\varphi_7 - \varphi_3) + (31) \\
+ \frac{1}{8} \zeta_3 \zeta_1 (3\zeta_3 - 1)(3\zeta_1 - 1) \begin{Bmatrix} y_1 - y_3 \\ x_3 - x_1 \end{Bmatrix} (\varphi_3 - 3\varphi_8 + 3\varphi_9 - \varphi_1),
\end{aligned}$$

from where $\mathbf{N}_{enh}$ again immediately follows.

5. Numerical examples

In this section the presented family of triangular elements is analysed through several numerical examples. The convergence analysis is performed on a force patch test using a regular mesh, and the conclusions drawn are implemented in the procedure to run the displacement patch test on an irregular mesh. Next, an infinite plate with a cylindrical hole subject to uniform tension is analysed and the results are compared to the analytical solution. In all the examples, both the standard Lagrange finite elements and the newly presented linked-interpolation finite elements are tested.

5.1 Force patch test: cantilever beam subject to pure tension

A force patch test is performed on a cantilever beam of length $L = 10$ m, height $h = 2$ m and a unit thickness subject to pure axial distributed loading $p = 10$ N/m² using a number of regular meshes. The micropolar material parameters used are equal to $\mu = 1000$ N/m², $\lambda = 1000$ N/m², $\nu = 500$ N/m² and $\beta = \gamma = 20$ N. In this example, the analytical results for the stress fields and the axial displacement at the free end (pL/E) are expected to be obtained for an arbitrary number of finite elements in the mesh. The triangular finite elements with the conventional (Lagrange) interpolation passed the test, while the first and third order elements with the newly proposed linked interpolation failed. To understand why two of the linked-interpolation elements fail this test and find the solution for how to modify them in order to pass it, an inversely posed problem has been studied: the correct nodal displacement and rotations have been prescribed to the elements with linked interpolation and the resulting stress and couple-stress tensors as well as the nodal load vector have been analysed. It turns out that the all the stress and stress-couple components are exact but, in the nodal load vector, the incorrect moment components are generated by the linked interpolation applied to

the virtual displacements. Interestingly, this does not happen in the quadratic element T6+LI. Motivated by this observation, a solution is found by applying the *Petrov-Galerkin* finite-element method, which is based on *different interpolation* for the test and the trial functions – here the virtual and the actual displacement fields. To eliminate the anomalous nodal moments caused by the linked interpolation of the virtual displacements $\bar{\mathbf{u}}$, here we choose to *interpolate them using the standard Lagrangian polynomials*, i.e.

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{d}}, \quad (32)$$

The real displacements, however, are still interpolated using the linked interpolation, i.e.

$$\mathbf{u} = (\mathbf{N}_u + \mathbf{N}_{enh}) \mathbf{d}, \quad (33)$$

The microrotation interpolation remains unchanged in both its virtual and its real form, i.e. $\bar{\varphi} = \mathbf{N}_\varphi \bar{\mathbf{d}}$ and $\varphi = \mathbf{N}_\varphi \mathbf{d}$. The Petrov-Galerkin modification described is applied to those elements which fail the patch test. We refer to these elements as T3LIPG, T10LIPG. When performing the same patch test using the elements based on the Petrov-Galerkin method, the patch test for all the elements is passed. To understand why the quadratic elements with linked interpolation (T6LI) pass this patch test, while the linear and the cubic elements (T3LI and T10LI) do not, let us pinpoint the main difference between these two groups of elements in the character of the enhanced shape functions caused by the linked interpolation. In the linear and the cubic elements, the enhancement is symmetric, which, when integrated over the element domain, gives a non-zero value, and thus provides non-desired nodal moments for the constant-stress state present here. On the other hand, the enhanced interpolation functions for the quadratic elements are antisymmetric and thus integrate to zero for the constant-stress state. In the work of Grbac et al. [9], this problem is solved by interpolating the external body and surface loads in accordance with the chosen interpolation, as defined in equation, for hexahedral elements, which results in additional nodal moment forces. As a result, the first order hexahedral finite element provides the analytical solution without the need to use the Petrov-Galerkin method.

5.2 Displacement patch tests for the micropolar continuum

According to Providas [10], the patch test for micropolar finite elements should consist of a set of three separate tests. The tests are performed on a rectangular domain bounded by the sides connecting the points 1–4 and discretised using the distorted finite-element mesh shown. The length and height of the domain are $L = 0.24$ m, $H = 0.12$ m and the coordinates of the internal nodes 5–8 are the following 5=(0.04,0.02),

6=(0.18,0.03), 7=(0.08,0.08) and 8=(0.16,0.08). The material parameters used are the same as defined in the force patch test example. The displacements and microrotations are imposed on the external nodes, while the volume loading (if any) is imposed on the interior of the domain. The element passes a patch test if the internal nodes are capable of reproducing the analytical solution imposed by the boundary conditions.

The first test is the standard patch test of the finite elements in the classical continuum theory, whereby imposing linearly varying displacement and a constant microrotation field via appropriate boundary conditions we obtain the state of constant symmetric stress and strain. The fields are defined as $u = 10^{-3}(x + 0.5y)$, $v = 10^{-3}(x + y)$, $\varphi = 0.25 \cdot 10^{-3}$.

The second test describes the state of constant non-symmetric shear, for which a constant body moment is needed. The actual input is given as $u = 10^{-3}(x + 0.5y)$, $v = 10^{-3}(x + y)$, $\varphi = 0.75 \cdot 10^{-3}$, $m_v = 1$.

The third test describes the state of constant curvature, whereby imposing linearly varying displacement, microrotation and body moment fields as well as a constant body force field we obtain linearly varying stresses and constant couple-stresses. Providas [10] considers the third patch test to be a necessary condition for finite-element convergence even though in this test the shear stresses are linearly varying, i.e. $u = 10^{-3}(x + 0.5y)$, $v = 10^{-3}(x + y)$, $\varphi = 10^{-3}(0.25 + (x - y))$, $p_x = p_y = 1$, $m_v = 2(x - y)$. However, satisfaction of a patch test in which stress distribution is variable is not necessary for convergence and, for this reason, we consider this test to be a higher-order patch test, analogous to a pure bending test.

All the proposed elements pass the constant stress tests. Regarding the third test, all the elements in which the standard Lagrangian interpolation has been utilised pass, which is expected even though it contradicts the results in the literature. For the highest-order element T10, however, the amount of data provided on the boundary has not been sufficient and four additional internal nodes have had to be additionally prescribed the field values to pass it. Concerning the family of elements with linked interpolation, T3LIPG fail to pass this test, while all the higher-order elements pass it. The results of the third test for the elements, which do not pass it, are presented in Table 2. Even though this patch test is not satisfied for the lower-order element of finite size, we consider that all the proposed elements satisfy the convergence criteria since, as argued earlier, they are able to reproduce exactly any state of constant stress.

Table 2. Results for Patch test 3

Element	$u * 10^{-3}$	$v * 10^{-3}$	$\varphi * 10^{-3}$	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	μ_{31}	μ_{32}
T3	0.195	0.210	0.400	4.00	1.59	1.41	0.04	-0.04
T3LIPG	0.194	0.205	0.401	4.01	1.54	1.36	0.04	-0.04
Exact	0.195	0.210	0.400	4.00	1.59	1.41	0.04	-0.04

5.3 Stress concentration around a circular hole

To analyse the influence of the micropolar effect in a homogeneous and isotropic linear elastic solid, the so-called Kirsch problem, an infinite plate with a circular hole subject to uniform tension is considered next. We focus on the so-called *stress-concentration factor* (K_t) – the ratio between a maximum longitudinal stress at the edge of the hole and the applied surface loading. The classical theory predicts a constant stress concentration factor equal to three regardless of the hole size and the material parameters. Experimental tests indicate a smaller stress-concentration factor than that. The analytical solution of the problem using the micropolar theory [11] is dependent on the hole radius r , the coupling number N and the characteristic length l of the material and it returns the stress-concentration factor which is increasingly smaller than the one obtained by the classical theory as the diameter of the hole decreases.

In our numerical analysis, the plate is necessarily taken to be of a finite size and only a quarter of the plate is analysed. The square quarter is taken to be of unit thickness, $L = 16.2$ mm long and with a hole of radius $r = 0.216$ mm subject to uniform uniaxial tension $p = 1$ N/mm² acting on one of its undented sides. The micropolar material parameters $\mu = 76923.1$ N/mm², $\lambda = 115385.0$ N/mm², $\beta = \gamma = 6352.25$ N, which correspond to the modulus of elasticity $E = 200000$ N/mm², Poisson's ratio $n = 0.3$ and a characteristic length $l = r/1.063 = 0.2031984948$ m are taken from [10]. The value of the micropolar material parameter ν is varied (indicating a variation in the coupling number N). The normal displacements and the microrotations along the dented sides are restrained. The results obtained by the proposed triangular finite elements with linked interpolation are compared to those obtained by the finite elements with standard Lagrangian interpolation. The finite element mesh, shown in Figure 2, consist of 360 elements. In the structured part of the mesh the finite elements project radially from the hole and are embedded within 22 concentric circles propagating in geometric progression with ratio between the radial increments of 1.2. The part of the mesh between the outermost band of the elements between the concentric circles and the undented edges is defined manually. The stresses are observed in the element containing the stress-concentration point $P=(0.0, 0.216)$, where

the analytical solution is provided. To avoid extrapolation of the computed stresses, the stress values for the numerical simulation are given at Gauss points closest to the edge of the hole, not at the exact edge, thus they can never exactly match the analytical result. The Gauss points monitored have the co-ordinates equal to $GP1=(0.0025, 0.2435)$, $GP2=(0.0199, 0.2184)$ and $GP3=(0.0199, 0.2184)$. The results for the stresses obtained are shown in Table 2. The numerical results for all the elements show that with the micropolar effect increased the stress-concentration factor is reduced, as predicted theoretically. The predictive power of all the elements, however, decreases as the coupling number increases. With the higher-order elements, the linked-interpolation elements' behaviour is exceedingly close to that of the standard elements, i.e. these elements do not contribute to the faster convergence rate. Interestingly, the higher-order linked-interpolation element T6LI does behave marginally better than its Lagrangian counterparts when there is no micropolar effect present. With the low-order triangular elements, the linked-interpolation slightly improves the accuracy, this time, however, with an increasing micropolar effect. This behaviour is not observed in the low-order quadrilateral elements [8].

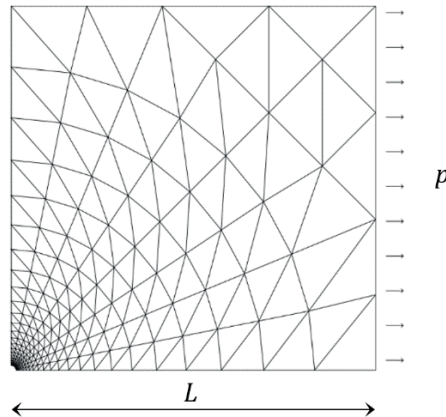


Figure 2. Triangular finite-element mesh for the Kirsch problem

Table 2. Stress-concentration factor K_t

N	K_t	EL	K_t , GP1	EL	K_t , GP2	EL	K_t , GP3
0.00	3.000	T3	2.846	T6	2.865	T10	2.849
		T3LIPG	2.846	T6LI	2.897	T10LIPG	2.849
0.25	2.849	T3	2.737	T6	2.729	T10	2.715
		T3LIPG	2.740	T6LI	2.729	T10LIPG	2.715
0.50	2.555	T3	2.508	T6	2.466	T10	2.454
		T3LIPG	2.514	T6LI	2.466	T10LIPG	2.454
0.75	2.287	T3	2.267	T6	2.228	T10	2.219
		T3LIPG	2.273	T6LI	2.228	T10LIPG	2.219
0.9	2.158	T3	2.101	T6	2.117	T10	2.108
		T3LIPG	2.109	T6LI	2.117	T10LIPG	2.108

6. Conclusion

A new family of membrane finite elements interpolated using the linked-interpolation concept for the analysis of the micropolar continuum theory is presented. Triangular elements of different order are developed and tested through four numerical examples and compared to the conventional elements interpolated using the Lagrangian interpolation. In order to assure convergence, the proposed linked-interpolation finite elements are modified using Petrov-Galerkin interpolation. For the infinite plate with circular hole benchmark problem, the newly proposed finite elements correctly reproduce the amount of stress concentration predicted by the micropolar theory, but they are only marginally more accurate than their Lagrangian counterparts.

Literatura

- [1] Nowacki, W. (1972). *Theory of Micropolar Elasticity*. Vienna: Springer-Verlag.
- [2] Lakes, R. S. (1983). Size Effects and Micromechanics of a Porous Solid. *Journal of Materials Science*, 18, 2572–2580.
- [3] Eringen, A. C. (2012). *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. New York: Springer-Verlag.
- [4] Cosserat, E., Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman.
- [5] Gauthier, R., Jahnman, W. E. (1975). A Quest for Micropolar Elastic Constants. *Journal of Applied Mechanics*, 42(2), 369–374.
- [6] Jelenić, G., Papa, E. (2011). Exact Solution of 3D Timoshenko Beam Problem Using Linked Interpolation of Arbitrary Order. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2), 171–183.
- [7] Ribarić, D., Jelenić, G. (2014). Higher-Order Linked Interpolation in Triangular Thick Plate Finite Elements. *Engineering Computations*, 31(1), 69–109.
- [8] Grbčić, S., Jelenić, G., Ribarić, D. (2019). Quadrilateral 2D Linked-Interpolation Finite Elements for Micropolar Continuum. *Acta Mechanica Sinica*, 35, 1001–1020.
- [9] Grbac, L., Jelenić, G., Ribarić, D., Grbčić Erdelj, S. (2024). Hexahedral Finite Elements with Enhanced Fixed-Pole Interpolation for Linear Static and Vibration Analysis of 3D Micropolar Continuum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(8), e7440.
- [10] Providas, E., Kattis, M.A. (2002). Finite Element Method in Plane Cosserat Elasticity, *Computers and Structures*, 80, 2059–2069.
- [11] Kirsch, E. (1898). Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 42, 797–807.

PLANIRANJE RJEŠENJA SUSTAVA ODVODNJE SANITARNIH OTPADNIH VODA NASELJA DRIVENIK

PLANNING A SANITARY WASTEWATER DRAINAGE SYSTEM FOR DRIVENIK SETTLEMENT

Stjepan Šimić*, Goran Volf*

Sažetak

Naselje Drivenik smješteno je u zaleđu grada Crikvenice, unutar administrativnih granica Vinodolske općine. Trenutno na tom području ne postoji sustavno rješenje za odvodnju otpadnih voda; umjesto toga, otpadne se vode zbrinjavaju individualno, putem septičkih jama, što dugoročno nije održivo s aspekta zaštite okoliša i javnog zdravlja. U sklopu ovog rada predloženo je idejno rješenje sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik. Cilj predloženog rješenja je zadovoljiti tehničke zahtjeve vezane uz izvedbu priključaka i savladavanje prepreka na terenu duž trase kanalizacijske mreže uz istodobnu optimizaciju duljine i profila kanalizacijskih kolektora te minimiziranje potrebe za izgradnjom dodatnih objekata. Sukladno prijedlogu Prostornog plana Vinodolske općine, otpadne vode naselja Drivenik predviđeno je odvoditi do centralnog uređaja za pročišćavanje otpadnih voda grada Crikvenice. Implementacijom predloženog sustava odvodnje omogućilo bi se učinkovito i ekološki prihvatljivo prikupljanje, transport, obrada i ispuštanje otpadnih voda, uz racionalizaciju troškova izgradnje i održavanja sustava. U okviru rada izrađena je situacijska shema sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik, svi relevantni hidraulički i statički proračuni kolektora te proračuni crpnih stanica. Također, sastavljen je i pripadajući aproksimativni troškovnik planiranih radova za implementaciju predloženog sustava.

Ključne riječi: sustavi odvodnje, horizontalno vođenje kanalizacijske mreže, sanitarne otpadne vode, idejno rješenje, hidraulički proračun, statički proračun kolektora, crpne stanice, naselje Drivenik

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: ssimic1@student.uniri.hr, goran.volf@gradri.uniri.hr

Abstract

The settlement of Drivenik is located in the hinterland of the City of Crikvenica, within the administrative boundaries of the Vinodol Municipality. Currently, there is no systematic solution for sanitary wastewater drainage system in this area; instead, wastewater is managed individually through septic tanks, which is not sustainable in the long term from the perspective of environmental protection and public health. As part of this study, a conceptual design for a sanitary wastewater drainage system for the settlement of Drivenik has been proposed. The objective of the proposed solution is to meet the technical requirements related to the construction of connections, as well as overcoming of terrain obstacles along the planned collectors route, while simultaneously optimizing the length of the sewer collectors, reducing pipe diameters, and minimizing the need for construction of additional installations. In accordance with the Spatial Plan of the Vinodol Municipality proposal, the sanitary wastewater from Drivenik is intended to be conveyed to the central wastewater treatment plant serving the City of Crikvenica. Implementation of the proposed sewage system would enable efficient and environmentally acceptable collection, transport, treatment, and discharge of wastewater, while maintaining cost-effectiveness in terms of construction and maintenance. As part of the study, a layout scheme of the sanitary wastewater drainage system for the settlement of Drivenik, all relevant hydraulic and structural calculations for the collectors, as well as calculations for the pumping stations were developed. Additionally, a corresponding approximate bill of quantities for the planned works required for the implementation of the system was prepared.

Key words: wastewater sewage systems, horizontal management of the sewer network, sanitary wastewater, conceptual design, hydraulic design, structural calculations of pipes, pump stations, settlement of Drivenik

1. Uvod

Sustavi odvodnje predstavljaju važnu komponentu komunalne infrastrukture svakog urbanog i ruralnog naselja. Njihova primarna funkcija je učinkovito prikupljanje, transport i obrada otpadnih i oborinskih voda, čime se osigurava zaštita zdravlja stanovništva, očuvanje okoliša te sprječavanje plavljenja i erozije tla. Pravilno planiran i izveden sustav odvodnje značajno doprinosi održivom razvoju zajednice te dugoročnom očuvanju kvalitete površinskih i podzemnih voda [1,2].

Sanitarne otpadne vode, koje nastaju u kućanstvima, školama, javnim ustanovama i poslovnim objektima, predstavljaju značajan izvor onečišćenja ukoliko se ne prikupljaju, odvede i obrađuju na pravilan način. One sadrže visoke koncentracije organskih tvari, dušika, fosfora i patogena, koji u kontaktu s površinskim i podzemnim vodama mogu izazvati ozbiljne posljedice za ljudsko zdravlje i okoliš. Sustavi za odvodnju

sanitarnih otpadnih voda stoga imaju presudnu ulogu u očuvanju javnog zdravlja, zaštiti prirodnih resursa i postizanju održivosti samog naselja [2].

U suvremenom planiranju komunalne infrastrukture posebna se pažnja posvećuje razdvajanju sanitarne i oborinske odvodnje, pri čemu se sanitarne vode odvođe zatvorenim cjevovodima do uređaja za pročišćavanje otpadnih voda (UPOV-a), a oborinske vode se najčešće zbrinjavaju lokalno ili posebnim sustavom [2].

U mnogim manjim naseljima, poput Drivenika, još uvijek ne postoji sustavno riješena sanitarna odvodnja, što dovodi do neadekvatnog zbrinjavanja otpadnih voda, i to najčešće putem septičkih i sabirnih jama, koje često nisu tehnički ispravne niti redovito održavane. Takav pristup ne zadovoljava današnje zakonske, tehnološke i sanitarno-ekološke zahtjeve [3].

Planiranje sustava za odvodnju sanitarnih otpadnih voda u naselju Drivenik nužno je sagledati kroz više aspekata: topografske uvjete terena, gustoću naseljenosti, dostupnost postojećih vodnih i infrastrukturnih resursa te zakonski okvir koji definira minimalne tehničke uvjete. Prema Zakonu o vodama [NN 66/19, 84/21, 47/2023] [4], jedinice lokalne samouprave dužne su osigurati pristup sustavu odvodnje i pročišćavanja za sva stalno nastanjena naselja, čime se osigurava usklađenost s europskom Direktivom o odvodnji i pročišćavanju komunalnih otpadnih voda [2024/3019] [5].

Posebno je važno naglasiti da sanitarne otpadne vode moraju biti odvedene do UPOV-a prije ispuštanja u prirodni recipijent (vodotok, more, tlo). To podrazumijeva ne samo izgradnju mreže kolektora, već i dodatne objekte sustava poput crpnih stanica, revizijskih okana, priključaka i UPOV-a, čije dimenzioniranje ovisi o količini i karakteristikama otpadnih voda te o konfiguraciji terena [2].

Cilj ovog rada je analizirati trenutno stanje u naselju Drivenik i izraditi adekvatni prijedlog za sustavnu odvodnju sanitarnih otpadnih voda, koje će zadovoljiti sve tehničke i zakonske kriterije, a također biti i ekonomski najprihvatljivije. Planirano rješenje omogućit će zaštitu podzemnih i površinskih voda te doprinijeti poboljšanju kvalitete života stanovništva.

Zbog pozicije naselja te ostalih karakteristika unutar predviđenog obuhvata, zbrinjavanje oborinskih voda planirat će se primjenom alternativnih metoda, odnosno integralnim pristupom.

Planirano rješenje sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik, koje je predloženo u ovom radu, temelji se na važećim tehničkim smjernicama, zakonodavnom okviru te načelima održivog gospodarenja

vodama, uz korištenje važećih pravila za projektiranje kanalizacijskih sustava [2].

2. Materijali i metode

2.1 Naselje Drivenik-Prostorni plan Vinodolske općine

Naselje Drivenik nalazi se u zaleđu Crikvenice, u Vinodolskoj općini. Naselje nema adekvatnog rješenja odvodnje otpadnih voda, već se otpadne vode individualno zbrinjavaju u septičkim i sabirnim jamama koje su u znatnoj mjeri propusne, pa se otpadne vode uglavnom prelijevaju u podzemlje i nisu dobro ekološko rješenje.

Prostornim planom uređenja Vinodolske općine [3] planira se izgradnja aglomeracije koja bi činila kanalizacijsku mrežu naselja Drivenik, Tribalj i Grižane s centralnim UPOV-om smještenim u Crikvenici, koji bi pročišćenu otpadnu vodu ispuštao u kanal, a zatim prema moru. Zbrinjavanje oborinskih voda s većih parkirališnih ili manipulativnih površina vršit će se preko odgovarajućih uređaja za pročišćavanje oborinskih voda. Također, odvodnja oborinskih voda će se rješavati lokalno, upuštanjem u teren ili u korito najbližeg vodotoka. Zbog mogućnosti pristupa mehanizacijom za održavanje sustava odvodnje, kao i za oborinsku odvodnju cesta i ulica, preporuča se vođenje trase u cestovnom pojasu (na mjestu odvodnog jarka, nogostupa ili po potrebi u trupu ceste). Sve aktivnosti na izgradnji ovoga sustava odvodnje vršit će se u skladu s odredbama Zakona o vodama [NN 66/19, 84/21, 47/2023] [4], Višegodišnjih programa gradnje Hrvatskih voda za razdoblje do 2030. godine [6] te drugih legislativnih i planskih dokumenata [3].

2.2 Smjernice za postavljanje kanalizacijske mreže

U izvedbi kanalizacije, zemljani radovi čine najčešće više od 50 % ukupnih troškova izvedbe, pa zato racionalan izbor dubine polaganja može bitno smanjiti troškove izgradnje kanalizacijskog sustava. Zbog minimalizacije troškova teži se kanalizacijske cijevi (niveletu) voditi paralelno s terenom vodeći pritom računa o ograničenjima projektnih parametara. Određivanje nivelete treba zadovoljiti sve tehničke zahtjeve vezane za priključke i savladavanje prepreka koje se mogu javiti na trasi kanala, a pritom biti ekonomski najprihvatljivije [1,2].

Kvaliteta rješenja u velikoj mjeri ovisi o kvaliteti podataka i podloga na kojima se samo rješenje sustava odvodnje određuje. Zbog toga je važno prikupiti i analizirati sve potrebne podloge koje utječu na horizontalno i vertikalno vođenje trase kolektora [2].

Prilikom horizontalnog, odnosno tlocrtnog vođenja trase kanala, situacijski trasa se treba polagati na najekonomičniji mogući način, tako da je ukupna duljina kanala najkraća, profili najmanji, izgradnja objekata minimalna te pogonski troškovi minimalni [2]. Zbog navedenog postoje određena pravila (smjernice) kojih se treba pridržavati prilikom horizontalnog vođenja trase kolektora [2]:

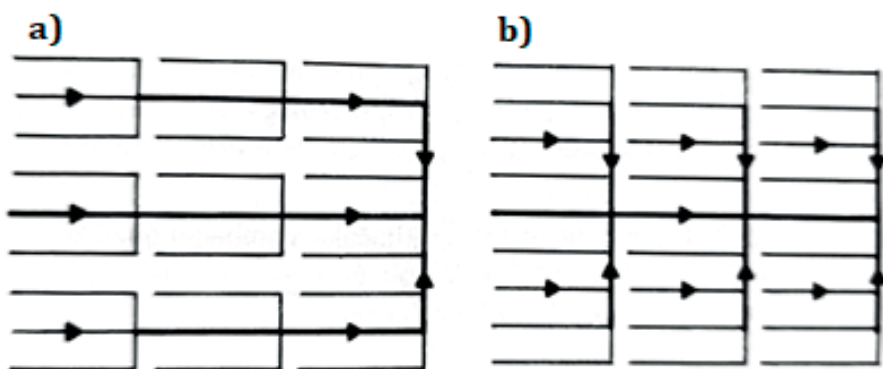
- Kanali se uvijek vode što bliže korisnicima (potrošačima), kako bi priključci pojedinih objekata bili što kraći.
- Kanali se vode tako da se na što kraćim dionicama priključi što više potrošača (racionalno).
- Kanali se trebaju voditi po prometnicama ili prostorima na koje se može pristupiti prometnim sredstvima i mehanizacijom.
- Izbjegava se polaganje kanala po privatnim površinama.
- Konfiguracija mreže mora biti takva da izbjegne, koliko je to moguće, križanje kanala s preprekama (željeznice, magistralne prometnice, vodotoci, magistralni vodovodi, arheološki lokaliteti, podzemne vode, zaštitne zone izvorišta, vojni objekti ili druga zaštićena područja).
- Rješenje kanalizacije mora se uklapati u urbanističko rješenje područja (prostorni planovi).
- Posebno je važno dobro izabrati lokaciju UPOV-a (zbog utjecaja na okoliš te okolno stanovništvo). Za svaku potencijalnu lokaciju treba analizirati utjecaj na okoliš, povezane troškove izgradnje, pogona i održavanja te primijeniti postupak višekriterijskog odlučivanja s ciljem optimizacije rješenja.

Optimalno situacijsko rješenje nije moguće jednoznačno odrediti primjenom unaprijed definiranih normi i pravila. Na Slici 1 prikazano je hipotetsko područje odvodnje na blago nagnutom terenu, koje se može projektirati na dva sasvim različita, a opet ispravna načina [2].

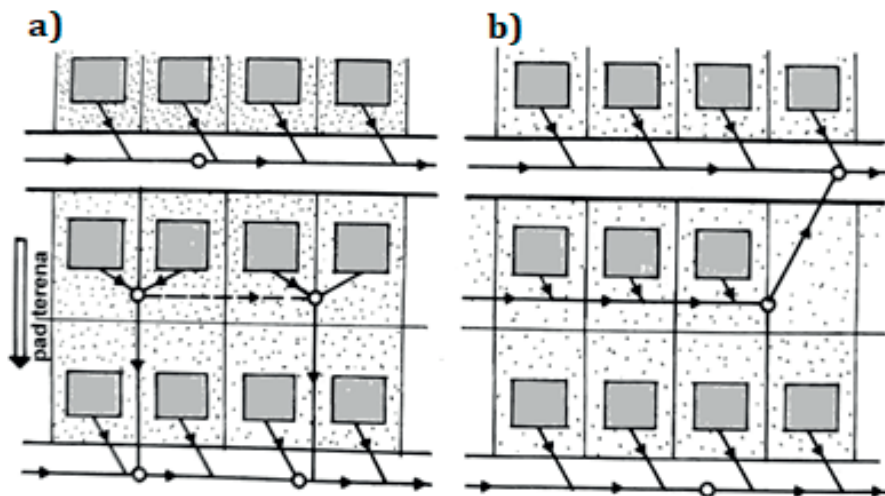
Također, rješenje priključaka pojedinih objekata može biti različito. Primjer jednog takvog rješenja za priključke stambenih objekata na blagoj padini prikazan je na Slici 2. Prema Slici 2a i 2b, oba rješenja su ispravna, a sam odabir rješenja prvenstveno ovisi o lokalnim prilikama i zahtjevima na konkretnom slučaju [2].

Da bi se došlo do veličina potrebnih za uspoređivanje pojedinih koncepata sustava odvodnje, odnosno kanalizacijske mreže, potrebno je razraditi osnovni koncept mreže, kojeg čini postavljanje osnovnog koncepta odvodnje s obzirom na osobine područja i uvjete ispuštanja voda, gdje se u pravilu radi osnovna shema odvodnje na kartama u mjerilu

1:5000. Na temelju izrađenog koncepta odvodnje utvrđuju se osnovne veličine pojedinih kriterija kojima će se usporediti pojedina alternativna rješenja, kao što su duljina kanalizacijske mreže, veličina osnovnih objekata, visine pumpanja otpadne vode i drugo. Na temelju odabranih kriterija i njihovih veličina odlučuje se o odabiru najpovoljnijeg rješenja odvodnje, gdje se u jednostavnijim situacijama odabir može izvršiti pojednostavljenom analizom bez korištenja višekriterijskih metoda optimizacije rješenja [2].



Slika 1. Primjer dvije moguće sheme a) i b) hipotetskog sustava odvodnje (prerađeno prema [2])



Slika 2. Primjeri mogućih rješenja priključaka stambenih objekata na kanalizacijski sustav (prerađeno prema [2])

planiranog sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda te tečenja sa slobodnim vodnim licem korištena su sljedeća ograničenja projektnih parametara u radu [1,2]:

- Ograničenje minimalnih brzina od $v_{\min}=0,5$ m/s za sanitarne otpadne vode te maksimalnih brzina od $v_{\max}=2,0$ m/s (prema uvaženoj projektantskoj praksi).
- Ograničenje uzdužnih padova; minimalni padovi računati su kao $I_{\min}=1/DN$ u mm, a maksimalni padovi kao $I_{\max}=1/DN$ u cm.
- Radi sprječavanja začepjenja, za kolektor sanitarnih otpadnih voda primijenjeno je ograničenje minimalnih profila, pri čemu je za glavni kolektor (mrežu) predviđen profil DN 250 mm, dok je za sekundarnu mrežu (rubni ogranci) predviđen minimalni promjer DN 200 mm.
- Ograničenje visine punjenja kanala; zbog upotrebe maksimalne veličine profila od DN 250 mm uzimano je da ograničenje iznosi $0.6 \cdot DN$.
- Ograničenje dubine ugradnje kolektora definirano je u rasponu od minimalne dubine $h_{\min}=1,5$ m do dna rova, odnosno $h_{\min}=1,0$ m do tjemena cijevi, što osigurava mehaničku zaštitu cjevovoda i sprječava djelovanje mraza. Maksimalna dozvoljena dubina ugradnje određena je uvjetom $h_{\max}=6,0$ m, uzimajući u obzir statičke zahtjeve, izvedivost iskopa i mogućnosti održavanja planiranog sustava.

Prilikom provjere ograničenja projektnih parametara potrebno je korigirati hidraulički proračun kako bi svi parametri ograničenja zadovoljili. Visinsko vođenje trase prilagođava se uvjetima na terenu na način da se kolektor ne polaže na prevelikim dubinama, a da se uvažava ograničenje minimalnih i maksimalnih dubina ugradnje kolektora te da se omogući što jednostavniji priključak korisnika na kolektor.

Za tečenje pod tlakom, u kanalizacijskim sustavima otpadne vode tlačne se u transportne cjevovode pomoću pumpi putem kojih voda otječe do UPOV-a ili na spojno okno gravitacijske kanalizacije. Proračun promjera tlačne cijevi bazira se na jednadžbi kontinuiteta, uz uvjet da brzine u tlačnoj cijevi iznose približno 1-2 m/s [1,2].

Osim toga, u kanalizacijskim crpkama vrlo je važan slobodan prolaz. Što je prolaz veći, manja je mogućnost začepjenja. Većina malih i srednjih crpki se najčešće proizvodi sa slobodnim prolazom veličine DN 80 mm, dok veće crpke imaju uglavnom slobodni prolaz od DN 100 mm ili veći. Kod malih crpki, koje se mogu koristiti kod manjih kućnih stanica ili u posebnim uvjetima (mali protoci) moguće je koristiti crpke s usitnjivačem

(grinder crpke), gdje ograničenje veličine profila tlačnog cjevovoda iznosi od DN 40-80 mm [2]. Proračun crpki bazira se na proračunu protoka crpljenja i manometarske visine dizanja pumpe, na temelju kojih se zatim vrši odabir crpnog agregata [1,2,7].

3.Rezultati i diskusija

3.1 Postavljanje mreže sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda

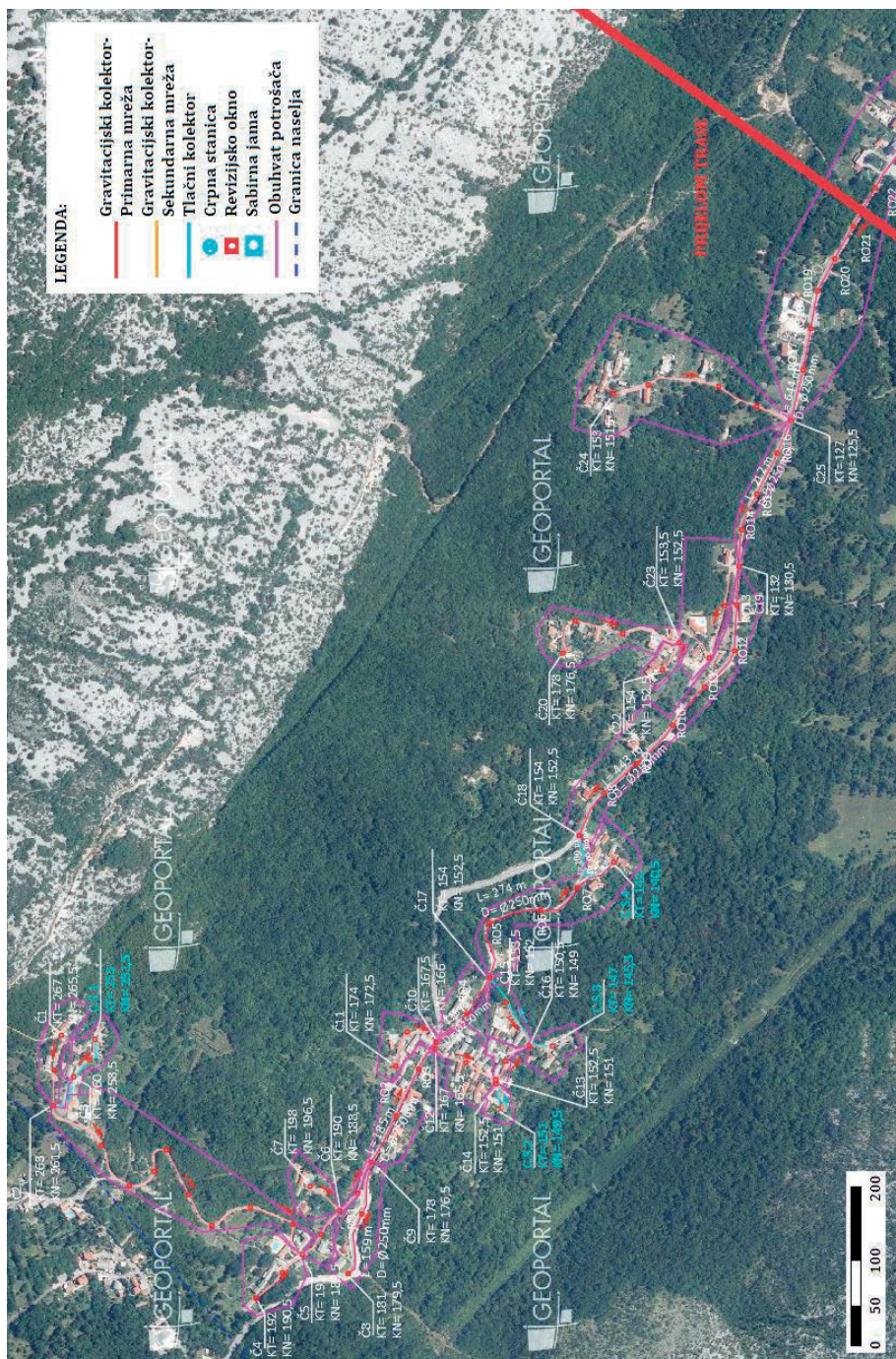
Prema smjernicama iz Prostornog plana Vinodolske općine [3] odabran je razdjelni sustav odvodnje, gdje će se sanitarne otpadne vode naselja Drivenik odvoditi prema centralnom UPOV-u u Crikvenici. Mreža oborinske odvodnje nije rješavana, već su za njezino zbrinjavanje predviđene primjene alternativnih metoda, odnosno integralnog upravljanja oborinskim vodama.

Koristeći smjernice za postavljanje kanalizacijske mreže (Poglavlje 2.2) postavljena je kanalizacijska mreža za odvodnju sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik (Slika 4 i Slika 5). Za optimalno vođenje trase sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda korištene su podloge digitalni ortofoto (DOF) i hrvatska osnovna karta (HOK) u mjerilu 1:5000.

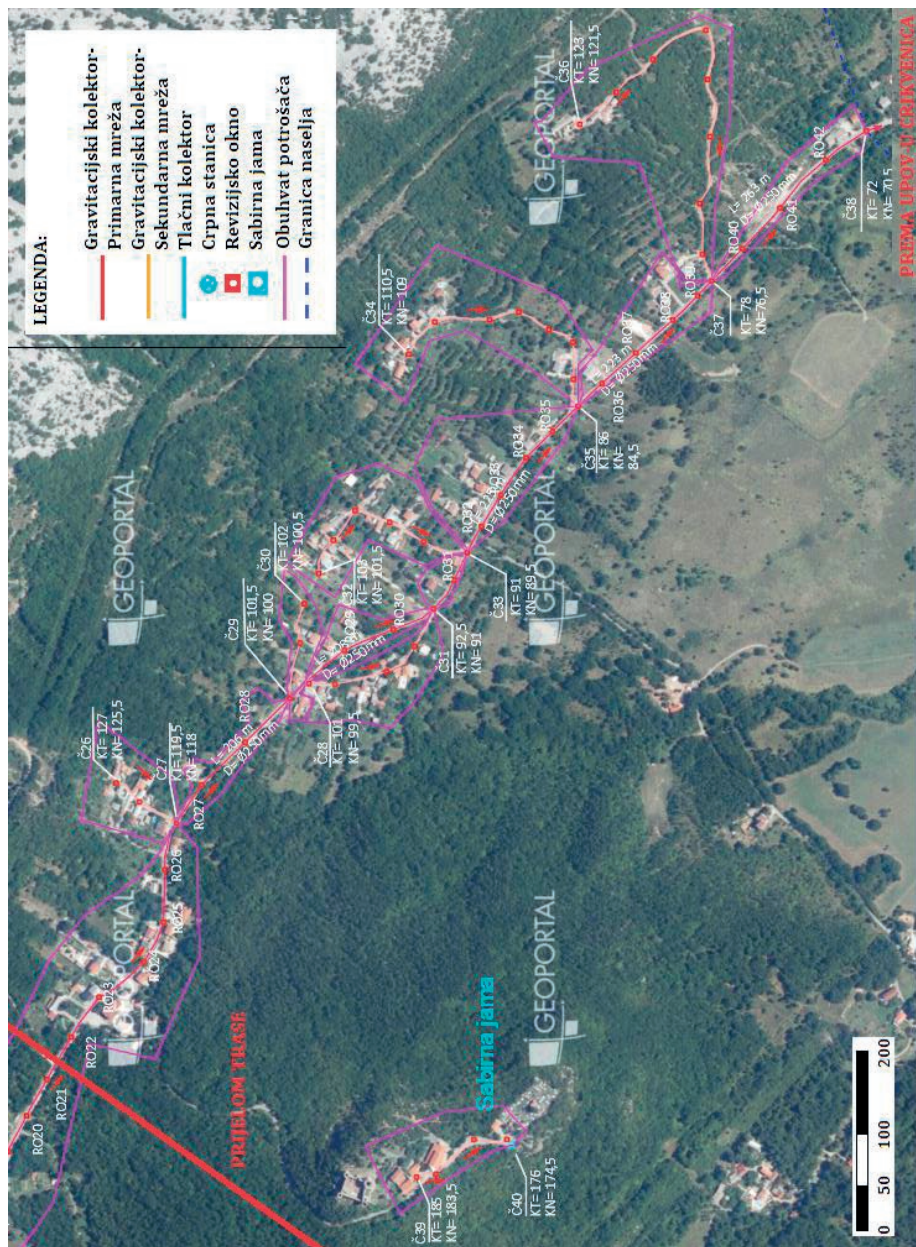
Kanalizacijska mreža je vođena po prometnicama pazeći da se ne ulazi u prostor privatnih katastarskih čestica. Ukupna dužina sanitarnog kanalizacijskog kolektora iznosi 7,558 m, od čega se 7,155 m odnosi na gravitacijske kolektore, a 403 m na tlačne kolektore. Planirani sustav odvodnje sanitarnih otpadnih voda sastoji se od ukupno 42 računske dionice, od čega su 4 tlačne dionice. Na mreži odvodnje sanitarnih otpadnih voda planirana je ugradnja ukupno 226 komada revizijskih i kaskadnih okana za pravilno funkcioniranje sustava odvodnje.

Državnom cestom (D99) prolazi primarna mreža koja odvodi sanitarne otpadne vode prema centralnom UPOV-u smještenom u Crikvenici. Na primarnoj dionici mreže, zbog savladavanja visinskih razlika predviđena je jedna tlačna dionica (CS4-Č18), dok su preostale tri tlačne dionice smještene na sekundarnoj mreži (CS1-Č2, CS2-Č14 i CS3-Č17). Za tlačne dionice sustava korištene su potopne grinder crpke smještene unutar revizijskih okana.

Zbog velike dislociranosti dijela naselja, a samim time neisplativosti postavljanja crpnih stanica, na dionici Č39-Č40 predviđeno je sakupljanje sanitarne otpadne vode u zajedničku sabirnu jamu koju će prazniti komunalno društvo (Slika 3). Izradom troškovnika i analizama dobiveno je da je izrada tlačne dionice sa pripadajućom crpnom stanicom tog dijela sustava te održavanje iste neisplativo, odnosno neadekvatno.



Slika 4. Situacijski prikaz sustava odvodnje (DOF) sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik – dio 1



Slika 5. Situacijski prikaz sustava odvodnje (DOF) sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik – dio 2

3.2 Hidraulički proračun kanalizacijske mreže

Hidraulički proračun kanalizacijske mreže proveden je na maksimalni satni protok raspodijeljen na pojedine dionice kanalizacijske mreže [8]. Maksimalni satni protok za cjelokupno naselje Drivenik iznosi 6,73 l/s, a odnosi se na stalno stanovništvo te turiste u privatnom smještaju. Posebno su dimenzionirane gravitacijske, a posebno tlačne dionice planiranog sustava odvodnje. Također, za svaku tlačnu dionicu sustava izrađen je proračun crpne stanice, dok je za tri mjerodavne dionice sustava izrađen statički proračun kolektora. Za dio naselja na dionici Č39-Č40 izrađen je proračun zajedničke sabirne jame.

Provedenim hidrauličkim proračunom, zbog malih protoka sanitarnih otpadnih voda, te kako bi se udovoljilo ograničenjima projektnih parametara, korištene su polietilenske cijevi visoke gustoće (PEHD) za gravitacijsku odvodnju promjera DN 250 mm za primarnu mrežu, dok je za sekundarnu mrežu odabran promjer DN 200 mm. Iako prema ograničenjima projektnih parametara minimalni profil za sanitarnu otpadnu vodu iznosi DN 250 mm [2], za sekundarnu mrežu (rubni ogranci mreže) zbog jako malih protoka, te kako bi se povećale minimalne brzine, a samim time i visina ispunjenosti kolektora, odabrani su minimalni profili DN 200 mm [2]. Za tlačne dionice sustava, a kako bi se osigurale optimalne brzine u tlačnim cijevima, odabrane su PEHD cijevi za tlačnu kanalizaciju promjera DN 63 mm i DN 100 mm.

Za tlačne dionice sustava, dimenzionirane su četiri crpne stanice. Za svaku crpnu stanicu izračunati su izlazni protoci i manometarske visine dizanja na temelju kojih su odabrani crpni agregati. Odabir crpnih agregata vršio se putem web aplikacije [9] s obzirom na što veći stupanj iskorištenja crpke, a na temelju izračunatih izlaznih protoka (Q_{izl}), te manometarske visine dizanja (H_{man}). Za dionice sustava CS1-Č2, i CS2-Č13 odabrana je potopna grinder crpka s maksimalnim protokom (Q_{max}) od 19,4 l/s, maksimalnom visinom dizanja (H_{max}) od 21,2 m, te izlazom iz crpke DN 63 mm. Spomenute dionice su male duljine i nalaze se na sekundarnoj mreži (rubni ogranci) s malim brojem potrošača. Za dionice sustava CS3-Č17 i CS4-Č18 odabrana je također potopna grinder crpka s Q_{max} od 25 l/s, H_{max} od 16,7 m, te izlazom iz crpke DN 100 mm. Za svaku crpnu stanicu izračunati su volumeni crpnih i retencijskih bazena, gdje je zbog malih protoka bio dovoljan volumen unutar revizijskih okana u koje su smješteni crpni agregati. Primjer crpke smještene unutar revizijskog okna prikazan je na Slici 6.

Statički proračun kolektora izrađen je za tri karakteristične dionice sustava Č1-Č2, Č27-Č29 i Č39-Č40 koje imaju različite karakteristike (promjer cijevi, dubina ugradnje, i drugo). Statički proračun proveden je

Tablica 1. *Rekapitulacija planiranih radova na sustavu odvodnje sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik*

R. br.	Vrsta radova	Cijena (EUR)	Cijena (%)
0	Pripremni radovi	23.520,04	1,00
I	Zemljani radovi	935.894,11	40,00
II	Betonski i armirački radovi	39.530,00	1,70
II	Asfalterški radovi	457.296,95	19,30
IV	Montažni radovi	897.119,55	38,00
	Rekapitulacija	2.353.360,65	100,00

Aproksimativnim troškovnikom planiranih radova na sustavu odvodnje sanitarnih otpadnih voda naselja Drivenik dobivena je ukupna cijena svih radova u iznosu od 2.353.360,65 eura, od čega najveći postotak zauzimaju zemljani (40 %) te montažni radovi (38 %).

4. Zaključak

Sustavno i stručno planiranje sustava odvodnje sanitarnih otpadnih voda predstavlja važan korak u unaprjeđenju komunalne infrastrukture naselja Drivenik. Analizom postojećeg stanja uočeni su značajni nedostaci u zbrinjavanju otpadnih voda, koji negativno utječu na okoliš i javno zdravlje. Predloženim idejnim rješenjem definiran je učinkovit, tehnički izvediv i ekološki prihvatljiv sustav odvodnje koji će osigurati sigurno prikupljanje i transport otpadnih voda prema centralnom UPOV-u u Crikvenici, sve u skladu s važećim zakonodavnim i tehničkim standardima te odredbama Prostornog plana.

Rješenjem su obrađene sve relevantne komponente sustava odvodnje, od definiranja trase kolektora, hidrauličkog dimenzioniranja gravitacijskih i tlačnih dionica, statičkog proračuna kolektora te analize potreba za crpnim stanicama s izradom pripadajućeg aproksimativnog troškovnika. Posebna pažnja posvećena je optimizaciji duljine kolektora i racionalizaciji troškova izgradnje i održavanja, čime se dodatno doprinosi ekonomskoj održivosti sustava odvodnje.

Implementacijom predloženog rješenja znatno će se smanjiti rizik od onečišćenja podzemnih i površinskih voda, poboljšat će se kvaliteta života stanovništva te će se omogućiti buduće regionalno povezivanje s okolnim naseljima. Ovo rješenje predstavlja doprinos održivom razvoju šireg područja Vinodolske općine te može poslužiti kao model za slična naselja koja se suočavaju s problemom neadekvatnog zbrinjavanja sanitarnih otpadnih voda.

Zahvala. *Ovaj je članak rezultat rada u okviru projekta, projektne linije ZIP UNIRI Sveučilišta u Rijeci, za projekt ZIP-UNIRI-1500-3-22 i UNIRI Institucionalnog istraživačkog projekta „Izazovi upravljanja vodnim resursima u vrijeme klimatskih promjena s obzirom na proizvodnju pitke vode“ (uniri-iz-25-18). Članak je proizašao iz završnog rada studenta prijediplomskog stručnog studija Stjepana Šimića pod naslovom „Idejno rješenje kanalizacijskog sustava naselja Drivenik“ obranjenog 17. srpnja 2025. godine.*

Literatura

- [1] Vuković, Ž. (1995): Osnove hidrotehnike, Prvi dio, druga knjiga. Zagreb, Akvamarine.
- [2] Margeta, J. (2009): Kanalizacija naselja, odvodnja i zbrinjavanje otpadnih voda, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Split.
- [3] Prostorni plan uređenja Vinodolske općine (PPUO, 2020-30, U izradi), III. Izmjene i dopune prostornog plana uređenja Vinodolske općine. (2020). Dostupno na URL: <https://vinodol.hr/odluka-o-zapocinjaju-postupka-strateske-procjene-utjecaja-iii-izmjena-i-dopuna-prostornog-plana-uredenja-opcine-vinodolske-na-okolis/> (pristupljeno: 25. 4. 2025.).
- [4] Zakon o vodama [NN 66/19, 84/21, 47/2023]. (2023). Dostupno na URL: <https://www.zakon.hr/z/124/zakon-o-vodama> (pristupljeno: 28. 5. 2025.).
- [5] EU Direktiva o odvodnji i pročišćavanju komunalnih otpadnih voda [2024/3019]. (2024). Dostupno na URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HR/TXT/?uri=LEGISSUM:l28008> (pristupljeno: 28. 5. 2025.).
- [6] Hrvatske vode (2021): Višegodišnji program gradnje komunalnih vodnih građevina za razdoblje do 2030. godine. Dostupno na URL: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.voda.hr/sites/default/files/dokumenti/visegodisnji_program_gradnje_komunalnih_vodnih_gradevina_za_razdoblje_do_2030._godine.pdf (pristupljeno: 26. 8. 2025.).
- [7] Jović, V. (2006): Osnove hidromehanike, Zagreb, Element.
- [8] Košuta, M. i Volf, G. (2024): Usporedba proračuna protoka metodom koeficijenta opterećenja stanovništvom te raspodjele stanovništva po pojedinim dionicama vodoopskrbne mreže. Zbornik radova (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci), XXVII, str. 11-24. <https://doi.org/10.32762/zr.27.1.1>
- [9] Grundfos. Web aplikacija za odabir crpke. Dostupno na URL: <https://product-selection.grundfos.com/hr> (pristupljeno: 30. 4. 2025.).
- [10] Vargon. Aplikacija za statički proračun Vargokor PEHD cijevi. (dostupno interno).
- [11] Hrvatske vode, Građevinski fakultet u Zagrebu (2022): Standardna kalkulacija radova u vodnom gospodarstvu, Bilten III 2022. Zagreb.

DIMENSIONIRANJE ARMIRANOBETONSKOG POTPORNOG ZIDA I OBALNOG ZIDA T- PRESJEKA PREMA EUROKODU 7

DESIGN OF T-SHAPED REINFORCED CONCRETE RETAINING WALL AND SEAWALL ACCORDING TO EUROCODE 7

Maja Kekez*, Nino Krvavica*

Sažetak

Rad prikazuje primjer dimenzioniranja armiranobetonskog (AB) potpornog zida i obalnog zida T-presjeka prema Eurokodu 7 (EC7). Ciljevi su: a) u okviru Proračunskog pristupa 3 (PP3), koji se primjenjuje u Hrvatskoj, ispitati osjetljivost rezultata provjera stabilnosti pri različitom razgraničenju konstrukcijskih i geotehničkih djelovanja te odgovarajućoj primjeni parcijalnih koeficijenata; i b) usporediti stabilnost potpornog i obalnog zida istih dimenzija. Nakon teorijskog pregleda EC7 i PP3, proveden je proračun AB T-zida za više varijanti definiranja djelovanja i uspoređeni rezultati provjera klizanja, prevrtanja i nosivosti temeljnog tla. Na kraju se uspoređuju dobiveni omjeri iskorištenja za potporni i obalni T-zid kako bi se pokazao utjecaj djelovanja mora (hidrostatskog tlaka i uzgona) na proračun.

Ključne riječi: Eurokod 7, proračunski pristupi, potporni zid, obalni zid, parcijalni koeficijenti, geotehnička djelovanja

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: mkekez@student.uniri.hr; nino.krvavica@uniri.hr

Abstract

This paper presents a practical example for the design of a reinforced-concrete (RC) T-section retaining wall and a T-section seawall in accordance with Eurocode 7 (EC7). The objectives are: a) in the context of Design Approach 3 (DA3), which is applied in Croatia, examine the sensitivity of stability verifications with respect to different classifications of structural and geotechnical actions and to where the corresponding partial factors are applied, and b) to compare the stability of retaining and seawalls of identical geometry. After a brief overview of EC7 and DA3, design calculations are carried out for an RC T-wall under several alternative definitions of actions, and the results of the sliding, overturning, and foundation bearing capacity checks are compared. Finally, the obtained utilization ratios for the retaining and seawall T-walls are compared to highlight the influence of seawater actions (hydrostatic pressure and uplift) on the design.

Key words: Eurocode 7, design approach, retaining wall, seawall, partial factors, geotechnical loads

1. Uvod

Potporni zidovi u geotehničkom inženjerstvu služe za zadržavanje tla na mjestima nagiba ili promjene razine terena te za smanjenje erozije i klizanja tla. Kada je takav zid izveden uz obalu mora, rijeke ili jezera, naziva se obalni zid i, uz funkcije potpornih zidova, dodatno štiti obalu od poplava i oštećenja te preuzima hidrostatska i, po potrebi, hidrodinamička djelovanja valova.

Kako bi se osigurala stabilnost zida, potrebno je odrediti sva djelovanja koja djeluju na njega, svojstva tla, geometriju i krutost konstrukcije, uvjete i drenažu vode. Radi standardizacije proračuna unutar Europske unije uveden je skup normi za geotehničko projektiranje, poznat kao Eurokod 7 (EC7) [1,2]. U Eurokodu 7 definirana su tri proračunska pristupa (PP1 – PP3), koji se razlikuju prema načinu primjene parcijalnih koeficijenata na djelovanja, svojstva materijala i otpornost. U Hrvatskoj je Nacionalnim dodatkom propisan Proračunski pristup 3 (PP3) [3].

Dva su osnovna cilja ovoga rada. Prvo, budući da EC7 ne daje jedinstveno, izričito razgraničenje između konstrukcijskih i geotehničkih djelovanja u sklopu PP3 [3], jedan od ciljeva rada je prikazati razlike u rezultatima proračuna potpornog zida uz različito definirana djelovanja. Drugi cilj vezan je uz identifikaciju razlika između potpornih zidova i obalnih zidova te se stoga provodi usporedba rezultata proračuna potpornog zida i obalnog zida istih dimenzija.

2. Geotehnički proračun prema EC7

2.1 Granična stanja prema Eurokodu 7

Eurokod 7 temelji se na konceptu graničnih stanja, koja dijelimo na granična stanja nosivosti (GSN) i uporabivosti (GSU) [4,5]. U ovome radu razmatraju se samo GSN, tj. stanja koja mogu dovesti do zakazivanja tla ili konstrukcije. U Eurokodu 7 definirano je pet GSN: granično stanje ravnoteže (EQU), granično stanje dijelova građevine (STR), geotehničko granično stanje (GEO), granično stanje izdizanja (UPL) i granično stanje hidrauličkog izdizanja tla (HYD) [4,5].

Kod provjere prema graničnim stanjima provjerava se da relevantna granična stanja nisu prekoračena u određenim proračunskim situacijama. Za EQU kriterij ravnoteže glasi [4]:

$$E_{dst,d} \leq E_{stb,d} \quad (1)$$

gdje su $E_{dst,d}$ destabilizirajući, a $E_{stb,d}$ stabilizirajući učinci djelovanja.

Za STR i GEO provjera se svodi na odnos između proračunskih učinaka djelovanja i proračunske otpornosti [4]:

$$E_d \leq R_d \quad (2)$$

Pritom se uvodi faktor iskoristivosti [4]:

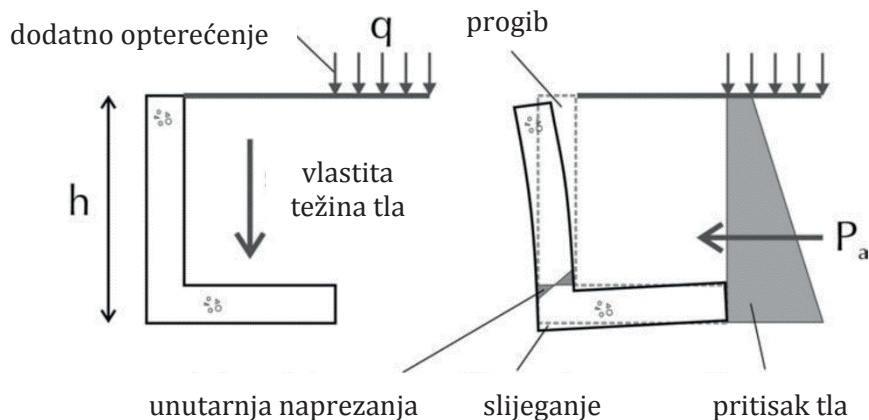
$$\Lambda = \frac{E_d}{R_d} \leq 100\% \quad (3)$$

Alternativno, klasični faktor sigurnost definira se kao [4]:

$$F_s = \frac{R_d}{E_d} \geq 1,00 \quad (4)$$

Geotehničko granično stanje (GEO) često je odlučujuće za dimenzioniranje temeljnih i potpornih konstrukcija (npr. klizanje, prevrtanje, nosivost temeljnog tla), dok STR kontrolira otpornost i konstruktivne detalje nosivih dijelova konstrukcije [4].

Na Slici 1 prikazan je potporni zid opterećen vlastitom težinom nasipa i jednolikim površinskim opterećenjem q . Uslijed bočnog pritiska nasipa na poledinu zida, pri aktivnom stanju razvija se horizontalna sila P_a (učinak djelovanja). Aktivno stanje se postiže kada se zid dovoljno udalji od nasipa; u suprotnom vrijedi stanje mirnog pritiska. Veličina P_a ovisi o geotehničkim parametrima nasipa, trenju na kontaktu zid-tlo, razini podzemne vode te o eventualnom hidrostatskom pritisku.



Slika 1. Djelovanja (lijevo) i učinci (desno) za gravitacijski potporni zid L-presjeka (prema [4])

Iako se djelovanja definiraju neovisno o materijalnim svojstvima, u geotehničkom proračunu otpornosti nužno je uvažiti čvrstoću i težinu tla kroz karakteristične vrijednosti i parcijalne koeficijente prema EC7. Zbog složenosti interakcije tlo-konstrukcija, bočni pritisak i stabilnost mogu se određivati različitim metodama: analitičkim modelima (Rankine/Coulomb), metodama ravnoteže granica ili numeričkim proračunima (npr. FEM), ovisno o traženoj razini točnosti [4].

2.2 Uvođenje pouzdanosti u proračun

U eurokodovima je sigurnost obuhvaćena pojmom pouzdanosti. Pouzdanost se u proračun uvodi parcijalnim koeficijentima ili odstupanjima geometrijske veličine. Ti se koeficijenti ili odstupanja primjenjuju, ovisno o metodi i pristupu, na: a) djelovanja ili učinke djelovanja, b) svojstva materijala i/ili otpornost te c) geometrijske parametre [4].

2.2.1 Djelovanja i učinci djelovanja

Kako bi se dobile proračunske vrijednosti učinaka djelovanja, prati se sljedeći postupak: karakteristične vrijednosti djelovanja $F_k \rightarrow$ reprezentativne vrijednosti djelovanja $F_{rep} \rightarrow$ proračunske vrijednosti djelovanja $F_d \rightarrow$ proračunski učinci djelovanja E_d , pri čemu se reprezentativne vrijednosti i kombinacije djelovanja uzimaju prema EN 1990 i EN 1991.

U EN 1997-1 je dopuštena primjena parcijalnih koeficijenata ili na djelovanja γ_F ili na učinke djelovanja γ_E , ali u pravilu ne na oboje istodobno [4].

2.2.2 Svojstva materijala i otpornost

Kako bi se dobile proračunske vrijednosti otpornosti R_d , prati se sljedeći postupak: karakteristična svojstva materijala $X_k \rightarrow$ proračunska svojstva $X_d \rightarrow$ proračunska otpornost R_d .

U praksi je, ovisno o odabranom proračunskom pristupu, često jedan od parcijalnih koeficijenata γ_M (materijali) ili γ_R (otpornost) jednak 1,0 radi pojednostavnjenja proračuna. Također, geometrijski parametri mogu se uzeti s odstupanjem Δa (npr. manja širina temelja), kako bi se ostalo na strani sigurnosti i obuhvatila odstupanja prilikom izvođenja [4].

2.2.3 Parcijalni koeficijenti

Tablica 1. Parcijalni koeficijenti za granično stanje GEO (prema [3])

Parametar			Djelovanja ili učinci		Svojstva materijala		Otpornost			
			A1	A2	M1	M2	R1	R2	R3	
Stalna djelovanja (G)	Nepovoljna	γ_G	1,35	1,0						
	Povoljna	$\gamma_{G,fav}$	1,0	1,0						
Promjenjiva djelovanja (Q)	Nepovoljna	γ_Q	1,5	1,3						
	Povoljna	$\gamma_{Q,fav}$	0	0						
Koeficijent kuta unutarnjeg trenja ($\tan \rho$)		γ_ρ			1,0	1,25				
Efektivna kohezija (c')		$\gamma_{c'}$			1,0	1,25				
Nedrenirana posmična čvrstoća (c_u)		γ_{cu}			1,0	1,4				
Jednoosna tlačna čvrstoća (q_u)		γ_{qu}			1,0	1,4				
Zapremninska težina (γ)		γ_γ			1,0	1,0				
Nosivost (R_v)		γ_{Rv}						1,0	1,4	1,0
Otpornost klizanju (R_h)		γ_{Rh}						1,0	1,1	1,0
Otpornost tla (R_e) ...potporne konstrukcije ...kosine		γ_{Re}						1,0		1,0
									1,4	
									1,1	

U Tablici 1 dani su parcijalni koeficijenti prema EN 1997-1 za geotehničke konstrukcije (npr. kosine, temeljne nožice, potporne zidove). Koeficijenti su grupirani kao A1 – A2 (za djelovanja ili učinke djelovanja), M1 – M2 (za svojstva materijala, odnosno parametre tla) i R1 – R3 (za otpornost). Nacionalni dodatak definira primjenu proračunskog pristupa [3,4].

2.3 Proračunski pristupi

Tijekom izrade Eurokoda 7 nije postignut jedinstven odabir proračunskih pristupa na razini EU, a koji se odnose na STR i GEO, pa je odlučeno da svaka država u Nacionalnom dodatku odredi koji će od tri pristupa primjenjivati [4,5].

Tablica 2. Proračunski pristupi prema Eurokodu 7 (prema [4])

Konstrukcija	Glavne varijable za pojedini proračunski pristup			
	1		2	3
	kombinacija 1	kombinacija 2		
Općenito	Djelovanja	Svojstva materijala	Djelovanja (ili učinci) i otpornost	Konstrukcijska djelovanja (ili učinci) i svojstva materijala
Kosine			Učinci djelovanja i otpornost	Konstrukcijski učinci djelovanja i svojstva materijala
Piloti i sidra		Otpornost	Djelovanja (ili učinci) i otpornost	Konstrukcijska djelovanja (ili učinci) i svojstva materijala

Proračunski pristup 1 (PP1): Pouzdanost se provjerava kroz dvije odvojene kombinacije parcijalnih koeficijenata (Kombinacija 1 i Kombinacija 2). Proračun je zadovoljen tek kada su obje kombinacije ispunjene. U prvoj se kombinaciji parcijalni koeficijenti primjenjuju na djelovanja/učinke i „blaže” na svojstva materijala, dok se u drugoj kombinaciji primjenjuju „stroži” koeficijenti na djelovanja/učinke i na svojstva materijala (vidi Tablicu 2) [4].

Proračunski pristup 2 (PP2): Provodi se jedan proračun u kojem se parcijalni koeficijenti primjenjuju na djelovanja/učinke i na otpornost, dok se svojstva materijala uzimaju s „blažim” skupom koeficijenata (vidi Tablicu 2) [4].

Proračunski pristup 3 (PP3): Također se provodi jedan proračun, ali se razlikuje tretman konstrukcijskih i geotehničkih djelovanja: parcijalni koeficijenti za konstrukcijska djelovanja primjenjuju se prema jednome skupu, a za geotehnička djelovanja i svojstva tla prema drugome; otpornost se obično uzima s neutralnim ili propisanim skupom koeficijenata (vidi Tablicu 2) [4].

U Hrvatskoj je Nacionalnim dodatkom propisana primjena proračunskog pristupa 3 za predmetne proračune [3].

2.3.2 Proračunski pristup 3

Kod Proračunskog pristupa 3 (PP3) nužno je razlikovati konstrukcijska i geotehnička djelovanja jer se na njih primjenjuju različiti skupovi parcijalnih koeficijenata. U Hrvatskoj vrijedi [3]: konstrukcijska djelovanja → A1, geotehnička djelovanja → A2, svojstva tla → M2, otpornosti → R3 (vidi Tablicu 3).

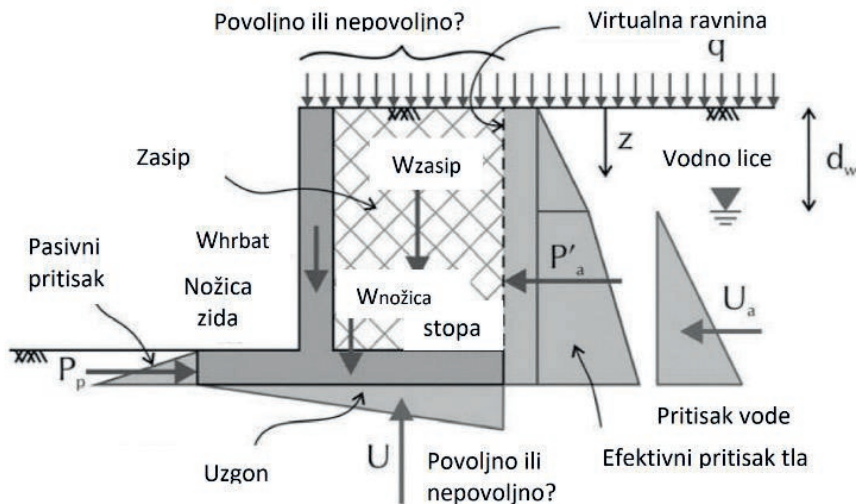
Geotehničko djelovanje u smislu Eurokoda 7 jest djelovanje preneseno na konstrukciju s temeljnog tla, nasipa, otvorene vode ili podzemne vode. Konstrukcijska djelovanja su preostala djelovanja koja proizlaze iz konstrukcije ili se na nju primjenjuju izravno (npr. vlastita težina, korisna opterećenja, oprema), tj. sve što nije geotehničko djelovanje [4]. Ova klasifikacija određuje koji se parcijalni koeficijenti primjenjuju u proračunu, pa je ključno biti dosljedan kroz sve provjere.

Tablica 3. Vrijednosti parcijalnih koeficijenata za proračunski pristup 3 (prema [4]).

Proračunski pristup 3			A1	A2	M2	R3
Stalna djelovanja (G)	Nepovoljna	γ_G	1,35	1,0		
	Povoljna	$\gamma_{G,fav}$	1,0	1,0		
Promjenjiva djelovanja (Q)	Nepovoljna	γ_Q	1,5	1,3		
	Povoljna	$\gamma_{Q,fav}$	0	0		
Koeficijent kuta unutarnjeg trenja ($\tan \rho$)		γ_ρ			1,25	
Efektivna kohezija (c')		$\gamma_{c'}$			1,25	
Nedrenirana posmična čvrstoća (c_u)		γ_{c_u}			1,4	
Jednoosna tlačna čvrstoća (q_u)		γ_{q_u}			1,4	
Zapremninska težina (γ)		γ_γ			1,0	
Otpornost (R) (osim vlačnih pilota)		γ_R				1,0
Vlačni piloti		$\gamma_{R,st}$				1,1

3. Dimenzioniranje armiranobetonskih zidova prema EC7

Slika 2 prikazuje tipični raspored djelovanja na AB potporni/obalni zid (vlastita težina, nasip + jednoliko površinsko opterećenje q , pasivni pritisak P_p , aktivni pritisak P'_a , hidrostatski pritisak U_a i uzgon U).



Slika 2. Djelovanja na armiranobetonski zid (prema [4]).

Armiranobetonski zidovi izloženi su djelovanjima tla i vode; ključne su provjere nosivosti temeljnog tla, klizanja i prevrtanja. Za AB zidove pretpostavlja se jednoliko površinsko opterećenje q na kruni nasipa te položaj razine podzemne vode d_w . Pretpostavlja se da je nožica zida dovoljno široka da se u zasipu može formirati Rankineova zona. Ukupni horizontalni pritisak tla σ_a uključuje efektivni pritisak i porni pritisak, a može se izračunati pomoću izraza koji uključuje koeficijent aktivnog pritiska tla K_a , zapreminsku težinu tla γ , koheziju c' , kut trenja φ te nagib površine zasipa β .

3.1. Nosivost tla

U provjeri nosivosti gleda se hoće li kombinacija vertikalnih učinaka djelovanja V_d dovesti do prekoračenja nosivosti temeljnog tla R_d ispod nožice [4]:

$$V_d \leq R_d \quad (6)$$

Gornji izraz se može napisati i u općenitoj formi [4]:

$$q_{Ed} \leq q_{Rd} \quad (7)$$

gdje je q_{Ed} proračunski učinak djelovanja na temeljno tlo, a q_{Rd} proračunska nosivost temeljnog tla.

Vlastita težina zida te težina tla iznad nožice djeluju povoljno jer povećavaju efektivnu vertikalnu silu i stabiliziraju kontakt tlo–temelj; vode se kao stalna, povoljna djelovanja. Nasuprot tome, aktivni pritisak tla na poledini i hidrostatski pritisak vode smatraju se nepovoljnima jer povećavaju ekscentričnost rezultante, čime se smanjuje djelotvorna širina oslonca i raspoloživa nosivost. Uzgonski pritisak ispod temelja također je nepovoljan jer umanjuje efektivnu vertikalnu silu. Površinsko opterećenje na kruni nasipa ima potencijalno dvostruki učinak: povoljno je za nosivost jer povećava vertikalnu, ali je istodobno nepovoljno jer povećava bočni pritisak. Stoga se u praksi provjeravaju scenariji sa i bez tog opterećenja, a prihvaća se nepovoljniji ishod. Pasivnom otporu ispred nožice se u provjeri nosivosti u pravilu ne pripisuje stabilizirajuća uloga kako se ne bi dvaput uračunavao isti izvor otpornosti. Kroz cijelu provjeru potrebno je paziti da se djelovanja i otpornosti ne zbrajaju dvostruko i da se dosljedno primijene parcijalni koeficijenti prema odabranom proračunskom pristupu.

3.2. Klizanje

Kod klizanja, proračunsko horizontalno djelovanje H_d , koje djeluje na virtualnoj ravni, mora biti manje ili jednako sumi proračunske otpornosti R_d od tla ispod temelja i bilo kakvih proračunskih otpornosti R_{pd} na prednjoj strani zida [4]:

$$H_d \leq R_d + R_{pd} \quad (8)$$

gdje je H_d proračunski učinak horizontalnog djelovanja, R_d proračunska otpornost na klizanje, a R_{pd} proračunski pasivni otpor tla. Proračunski učinak horizontalnog djelovanja H_d uključuje efektivni pritisak tla i vode. Otpornost na klizanje R_d uključuje vlastitu težinu zida umanjenu za uzgon, kut trenja na kontaktu konstrukcije i tla δ te parcijalne koeficijente za djelovanja i otpornost.

U ovom se izrazu na vlastitu težinu zida gleda kao na povoljno djelovanje jer povećanje težine dovodi do povećanja otpornosti na klizanje. Uzgon se gleda kao nepovoljno djelovanje jer povećanje uzgona dovodi do smanjenja otpornosti na klizanje. Zato vrijedi da je parcijalni koeficijent za W_{Gk} veći od parcijalnog koeficijenta za U_{Gk} , odnosno $\gamma_G > \gamma_{G, fav}$. Još jedan razlog zašto se na uzgon gleda kao na nepovoljno djelovanje jest da on nastaje iz istog izvora kao i horizontalni hidrostatski pritisak U_a , koji je nepovoljno djelovanje, a zbog dosljednosti bi se za djelovanja nastala iz istog izvora trebali koristiti isti koeficijenti [4]. Ista logika mogla bi se

primijeniti na vlastitu težinu zasipa jer ona doprinosi i pritisku tla P'_a i težini zida. Međutim, nije sigurno hoće li tlo u zasipu ispred virtualne ravnine biti jednako zbijeno kao i tlo iza ravnine, pa se zato preporučuje na pritisak tla i vlastitu težinu zasipa gledati kao zasebna djelovanja. Težina dodatnog površinskog opterećenja q često se zanemaruje kod računanja proračunske otpornosti jer se radi uglavnom o promjenjivom djelovanju i kritičnija situacija nastaje ako ga nema [4,5].

3.3. *Prevrtanje*

U provjeri prevrtanja uspoređuju se momenti koji potencijalno mogu prevrnuti zid $M_{Ed,dst}$ s onima koji ga stabiliziraju $M_{Ed,stab}$, najčešće oko nožice [4]:

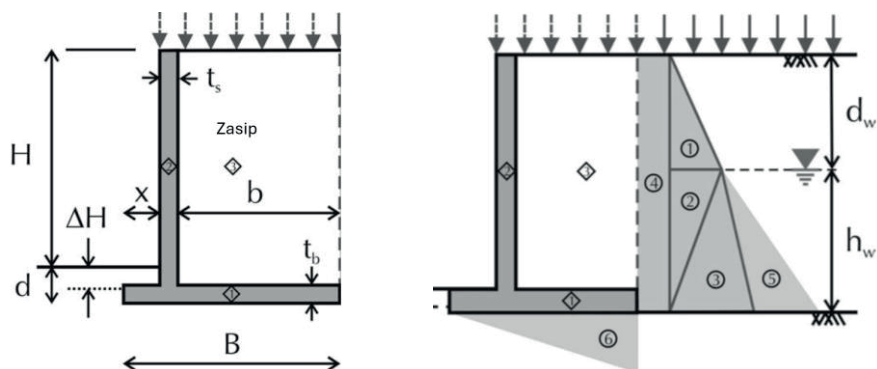
$$M_{Ed,dst} \leq M_{Ed,stab} \quad (9)$$

Aktivni pritisak tla i hidrostatski pritisak vode računaju se kao nepovoljni jer stvaraju momente prevrtanja, a uzgon dodatno smanjuje stabilizirajući učinak vlastite težine. Stabilizaciju osigurava vlastita težina hrbata i nožice te težina tla iznad nožice, koje generiraju momente suprotne prevrtanju; ti se doprinosi vode kao povoljna, stalna djelovanja. Površinsko opterećenje iznad nasipa najčešće se zanemaruje u ovoj provjeri budući da je scenarij bez njega u pravilu nepovoljniji. Pasivni otpor ispred nožice mogao bi doprinijeti stabilizaciji, ali se obično ne računa ili se uzima vrlo ograničeno zbog nesigurnosti njegove mobilizacije tijekom vijeka konstrukcije.

4. **Primjer proračuna potpornog i obalnog AB zida T-presjeka prema EC7**

4.1 *Primjer proračuna potpornog AB zida T-presjeka*

Na Slici 3 prikazana su djelovanja koja utječu na potporni AB zid T-presjeka [4]. Djelovanja (vrijednosti u kružnici) se mogu podijeliti na aktivni pritisak tla (1-3), aktivni pritisak tla uslijed dodatnog površinskog opterećenja q (4), hidrostatski pritisak (5) i uzgon (6), dok se vlastite težine (vrijednosti unutar pravokutnika) mogu podijeliti na težinu nožice zida (1), težinu hrbata zida (2) i težinu zasipa (3).



Slika 3. Dimenzije i djelovanja na AB potporni zid T-presjeka [4].

Za primjer su odabrane sljedeće dimenzije AB zida: $H = 3,0$ m; $d = 0,5$ m; $\Delta H = 0,3$ m; $x = 0,5$ m; $t_s = 0,25$ m; $B = 2,9$ m; $b = 2,15$ m; $t_b = 0,30$ m. Razina podzemne vode je $d_w = 1,0$ m. Zapreminske težine betona, zasipa i vode su $\gamma_c = 25,0$ kN/m³, $\gamma_k = 18,0$ kN/m³ i $\gamma_v = 9,8$ kN/m³. Površinsko kontinuirano opterećenje iznosi $q = 10,0$ kN/m². Za zasip se pretpostavlja kameni nabačaj s karakterističnim kutom unutarnjeg trenja $\varphi_k = 38^\circ$, a za temeljno tlo kamenomet izveden od šljunka sljedećih karakteristika: karakteristični kut efektivnog unutarnjeg trenja temeljnog tla $\varphi_{k,fdn} = 38^\circ$ i karakteristični kut trenja u kritičnom stanju temeljnog tla $\varphi_{cv,k,fdn} = 33^\circ$.

Proračun graničnog stanja GEO, odnosno provjera na nosivost, klizanje i prevrtanje, provedena je prema PP3, pri čemu su definirane četiri različite pretpostavke (kombinacije) koja djelovanja (površinsko kontinuirano opterećenje q i ispuna) su geotehnička, a koja konstruktivna:

- Pretpostavka 1 (Pr. 1): Ispuna i površinsko opterećenje q su konstruktivna djelovanja
- Pretpostavka 2 (Pr. 2): Ispuna i površinsko opterećenje q su geotehnička djelovanja
- Pretpostavka 3 (Pr. 3): Ispuna je konstruktivno, a površinsko opterećenje q geotehničko djelovanje
- Pretpostavka 4 (Pr. 4): Ispuna je geotehničko, a površinsko opterećenje q konstruktivno djelovanje.

Proračun prati postupak detaljno definiran u [4], a sastoji se od sljedećih koraka:

- Određivanje stalnih i promjenjivih djelovanja te pripadnih momenata
- Definiranje karakterističnih i proračunskih svojstava tla i materijala konstrukcije

- Računanje proračunskih učinaka djelovanja (sile, momenti i položaj rezultante u nožici)
- Provjera otpornosti na klizanje na dodirnoj plohi temelj-tlo
- Provjera nosivosti temeljnog tla
- Provjera na prevrtanje usporedbom destabilizirajućih i stabilizirajućih momenata.

U Tablici 4 prikazani su konačni proračunski učinci djelovanja i otpornosti te pripadni omjeri iskorištenosti potpornog AB zida za GEO prema PP3 i četiri različite pretpostavke vrste djelovanja; detaljni među-koraci nisu prikazani radi sažetosti.

Tablica 4. Rezultati provjere stabilnosti potpornog AB zida T-presjeka za GEO prema PP3 i četiri pretpostavke djelovanja.

Provjera	Veličina	jed.	Pr. 1	Pr. 2	Pr. 3	Pr. 4
drenirano klizanje	H_{Ed}	kN/m	79,77	69,06	77,62	71,21
	H_{Rd}	kN/m	81,29	81,29	81,29	81,29
	$\Lambda_{GEO,1}$	%	98,1 %	85,0 %	95,5 %	87,6 %
drenirana nosivost	q'_{Ed}	kPa	96,30	82,20	93,80	84,76
	q'_{Rd}	kPa	147,28	118,65	149,03	117,57
	$\Lambda_{GEO,2}$	%	65,4 %	69,3 %	62,9 %	72,1 %
prevrtanje	$M_{Ed,dst}$	kNm/m	165,18	150,33	161,42	154,10
	$M_{Ed,stab}$	kNm/m	425,76	338,50	417,60	346,66
	$\Lambda_{GEO,3}$	%	38,8 %	44,4 %	38,7 %	44,5 %

Širina nožice odabrana je upravo da sve provjere budu unutar dopuštenih vrijednosti, ali se može primijetiti osjetljivost proračuna na pretpostavke djelovanja (Pr. 1 do Pr. 4). Ove razlike nastaju prvenstveno zbog različitih parcijalnih koeficijenata primijenjenih na djelovanja od aktivnog potiska tla i površinskog opterećenja, što prema PP3 izravno mijenja proračunske učinke.

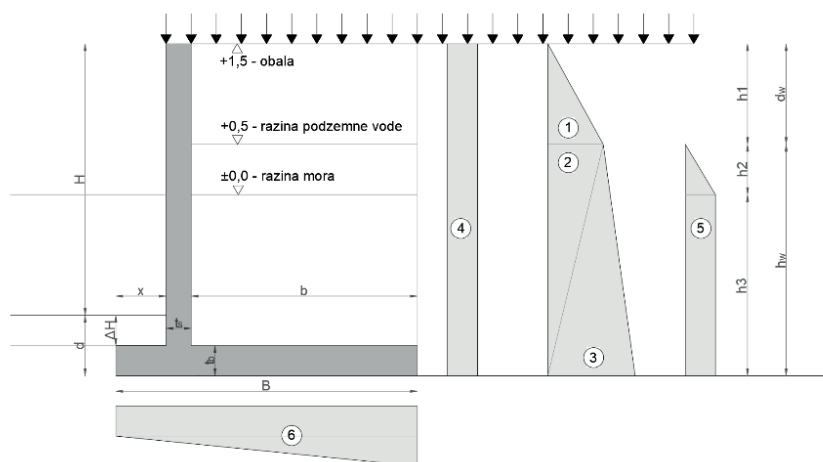
Klizanje je kritična provjera, učinak djelovanja H_{Ed} varira od ~69 do ~80 kN/m, dok je otpornost H_{Rd} praktično jednaka u svim pretpostavkama, što je u skladu s PP3 (povoljna stalna djelovanja se ne mijenjaju). Pretpostavka 1 daje najveći omjer iskoristivosti ($\Lambda_{GEO,1} \approx 98 \%$), tj. granično stanje klizanja je najkritičnije u toj pretpostavci. U ostalim pretpostavkama sigurnosna rezerva je veća.

Nosivost temeljnog tla također pokazuje značajne razlike među pristupima i za učinke djelovanje i za otpornost. Pretpostavka 4 daje najveći omjer iskoristivosti ($\Lambda_{\text{GEO},2} \approx 72 \%$), dok ostali pristupi daju nešto niže vrijednosti.

Prevrtanje isto tako daje primjetne razlike među pristupima i za destabilizirajuće i stabilizirajuće učinke djelovanja (momente). Kao i kod nosivosti temeljnog tla, pretpostavka 4 daje najveći omjer iskoristivosti ($\Lambda_{\text{GEO},3} \approx 44,5 \%$), vrlo slično kao i pretpostavka 2, dok ostale dvije pretpostavke daju nešto niže vrijednosti.

4.2 Primjer proračuna obalnog AB zida T-presjeka

Na Slici 4 prikazana su djelovanja koja utječu na obalni AB zid T-presjeka. Sva vlastita djelovanja i opterećenja su označena na jednak način kao i kod potpornog zida (Slika 3), jedino je razlika u njihovom obliku kod hidrostatskog pritiska i uzgona uslijed različite razine vode ispred zida. Naime, za proračun obalnog zida pretpostavljena je srednja razina mora ispred zida i razina podzemne vode 0,5 m iznad srednje razine mora iza zida. Umjesto slatke vode, u ovom slučaju se pretpostavlja morska voda zapremine težine $\gamma_c = 10,1 \text{ kN/m}^3$. S obzirom na to da se kod proračuna potpornog zida pretpostavka 1 pokazala kritična, ista je usvojena i u analizi obalnog zida radi direktne usporedbe.



Slika 4. Dimenzije i djelovanja na obalni AB zid T-presjeka.

U Tablici 5 prikazani su konačni proračunski učinci djelovanja i otpornosti te pripadni omjeri iskorištenosti obalnog AB zida za GEO prema PP3 i kritičnom pretpostavkom djelovanja (pretpostavka 1) te usporedba s rezultatima proračuna potpornog AB zida.

Za razliku od potpornog zida, obalni zid istih dimenzija ne zadovoljava provjeru na klizanje ($\Lambda_{\text{GEO},1} \approx 113 \%$ u odnosu na $\Lambda_{\text{GEO},1} \approx 98 \%$). Iako je učinak djelovanja nešto niži kod obalnog zida, otpornost je znatno niža zbog hidrostatskih djelovanja (primarno znatno većeg uzgona koju umanjuju vlastitu težinu zida).

Provjera nosivosti temeljnog tla zadovoljava s nižim omjerom iskoristivosti u usporedbi s potpornim zidom ($\Lambda_{\text{GEO},2} \approx 56 \%$ u odnosu na $\Lambda_{\text{GEO},2} \approx 65 \%$) zbog manjih horizontalnih sila (obostrano djelovanje hidrostatskog pritiska) i većih sila uzgona.

Također i provjera na prevrtanje zadovoljava, iako je omjer iskoristivosti nešto viši u usporedbi s potpornim zidom ($\Lambda_{\text{GEO},3} \approx 45 \%$ u odnosu na $\Lambda_{\text{GEO},3} \approx 39 \%$) jer hidrostatski pritisak (primarno, uzgon) povećava destabilizirajući moment.

Tablica 5. Rezultati provjere stabilnosti obalnog AB zida T-presjeka za GEO prema PP3 i kritičnoj pretpostavci djelovanja te usporedba s potpornim zidom (pretpostavka 1).

Provjera	Veličina	jed.	Potporni zid	Obalni zid
drenirano klizanje	H_{Ed}	kN/m	79,77	70,58
	H_{Rd}	kN/m	81,29	62,37
	$\Lambda_{\text{GEO},1}$	%	98,1 %	113,2 %
drenirana nosivost	q'_{Ed}	kPa	96,30	80,00
	q'_{Rd}	kPa	147,28	143,95
	$\Lambda_{\text{GEO},2}$	%	65,4 %	55,6 %
prevrtanje	$M_{\text{Ed,dst}}$	kNm/m	165,18	191,15
	$M_{\text{Ed,stb}}$	kNm/m	425,76	425,76
	$\Lambda_{\text{GEO},3}$	%	38,8 %	44,9 %

5. Zaključak

U ovome radu prikazan je primjer dimenzioniranja armiranobetonskog potpornog i obalnog zida T-presjeka prema Eurokodu 7, s fokusom na Proračunski pristup 3, koji se primjenjuje u Hrvatskoj. Pokazano je da rezultati provjera značajno ovise o odabiru konstrukcijskih i geotehničkih djelovanja te o primjeni parcijalnih koeficijenata; u praksi to znači A1 za konstrukcijska, A2 za geotehnička djelovanja, M2 za tlo i R3 za otpornosti.

Analiza varijanti djelovanja za odabrani primjer pokazala je da je kritična situacija ona kada su površinsko opterećenje i ispunja promatrani kao konstruktivno djelovanje koje djeluje direktno na armiranobetonski zid. U tom je slučaju klizanje kritična provjera (Λ do $\approx 98\%$), dok nosivost temeljnog tla i prevrtanje imaju nešto viši faktor sigurnosti. Pri usporedbi potpornog i obalnog zida istih geometrija, obalni zid postaje kritičan zbog djelovanja mora (hidrostatski pritisak i uzgon): u referentnoj pretpostavci klizanje ne zadovoljava ($\Lambda \approx 113\%$), dok nosivost i prevrtanje ostaju unutar dopuštenih vrijednosti. Time je potvrđeno da rezultate nije moguće preslikati s potpornog na obalni zid bez uvažavanja utjecaja djelovanja mora.

Iz provedenih analiza proizlazi da je pri dimenzioniranju armiranobetonskih zidova prema EC7 presudno identificirati koja djelovanja djeluju povoljno, a koja nepovoljno te u kontekstu PP3 dosljedno odrediti koja se djelovanja klasificiraju kao geotehnička, a koja kao konstrukcijska, pa sukladno tome primijeniti parcijalne koeficijente.

Ograničenja rada odnose se na usvojene idealizacije: korišten je analitički model aktivnog pritiska tla i ravninski model; analiza je bila fokusirana na granično stanje GEO, dok se u praksi moraju provesti i provjere graničnog stanja EQU (osobito važno za obalne zidove), kao i provjere za potresno djelovanje, što nadilazi obuhvat ovoga rada.

S obzirom na oskudnost sličnih objavljenih primjera u domaćoj i stranoj literaturi te na iskustva iz prakse koja upućuju da se EC7 još uvijek nedovoljno sustavno primjenjuje kod obalnih konstrukcija, nužno je: a) razviti i objaviti nacionalno usklađene upute s razgraničenjem djelovanja u PP3 i primjerima proračuna korak-po-korak; b) potaknuti edukaciju projekatanta kroz stručna usavršavanja i ogledne radne primjere; c) u praksi standardizirati predloške i kontrolne liste (klasifikacija djelovanja, izbor skupova A1/A2–M2–R3, scenariji razina voda, tretman pasivnog otpora); te d) proširiti istraživanja numeričkim modeliranjem interakcije tlo–konstrukcija. Takvi koraci povećat će pouzdanost i transparentnost projekata te olakšati širu i konzistentniju primjenu EC7 u obalnim i geotehničkim konstrukcijama u složenim uvjetima.

Literatura

- [1] Hrvatska norma HRN EN 1997-1:2012, Eurokod 7: Geotehničko projektiranje – 1. dio: Opća pravila (EN 1997-1:2004 + AC:2009)
- [2] Hrvatska norme HRN EN 1997-1:2012/A1:2014, Eurokod 7: Geotehničko projektiranje – 1. dio: Opća pravila (EN 1997-1:2004/A1:2013) - Amandman
- [3] Hrvatska norma HRN EN 1997-1:2012/NA:2016, Eurokod 7: Geotehničko projektiranje – 1. dio: Opća pravila – Nacionalni dodatak
- [4] Bond Andrew, Harris Andrew, Decoding Eurocode 7, Taylor & Francis, e-Library, 2008.
- [5] Bond, A.J., Schuppener, B., Scarpelli, G. and Orr, T.L.L., 2013. *Eurocode 7: Geotechnical Design—Worked examples*. JRC Scientific and Policy Reports. European Commission, Joint Research Centre. Edited by S. Dimova, B. Nikolova and A.V. Pinto.
- [6] Ivandić, K., Bandić, M. and Soldo, B., 2010. Embedded Retaining Wall Limit State Analysis according to Eurocode 7. *Tehnički vjesnik*, 17(3), pp.263-271.

PROCJENA STVARNIH I NEIZBJEŽNIH GUBITAKA U VODOOPSKRBNIM SUSTAVIMA

ASSESSMENT OF REAL AND INEVITABLE LOSSES IN WATER SUPPLY SYSTEMS

Ivan Jurčević*, Vanja Travaš*

Sažetak

Gubitci vode u vodoopskrbnim sustavima uzrokuju značajne ekonomske i ekološke štete. Pored povećanja troškova distribucije pitke vode, oni nepovoljno utječu i na vodne resurse, što je osobito izraženo u područjima s ograničenim zalihama vode. Unatoč uložnim naporima, u Republici Hrvatskoj gubici i dalje čine značajan udio ukupne potrošnje te prosječno dosežu i do 50 % zahvaćenih količina vode. Procjena gubitaka temelji se na specifičnim pokazateljima stanja vodnogostupne infrastrukture, među kojima se posebno ističe ILI pokazatelj (engl. Infrastructure Leakage Index), predložen od Međunarodne udruge za vodu (engl. International Water Association), definiran kao omjer stvarnih i neizbježnih gubitaka vode. U radu je prikazana teorijska osnova procjene ILI pokazatelja s naglaskom na ključne parametre koji na njega utječu (stvarni i neizbježni gubici, duljina cjevovoda, prosječni tlak u sustavu i broj korisnika). Također je prikazan praktičan primjer procjene ILI pokazatelja temeljen na računalnom modelu određene DMA zone (engl. District Metered Area). Primjenom programa EPANET modelirani su tlakovi unutar zadane DMA zone, a na temelju dobivenih podataka procijenjeni su stvarni i neizbježni gubici vode. Analizom su identificirana područja unutar DMA zone, koja zahtijevaju implementaciju mjera za smanjenje gubitaka vode i poboljšanje operativne učinkovitosti sustava. Zaključeno je da se smanjenje ILI pokazatelja na ciljnu vrijednost može postići isključivo iterativnom primjenom numeričkih analiza i terenskih mjerenja.

Ključne riječi: vodoopskrbni sustavi, gubici, ILI pokazatelj, DMA zona, EPANET

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: ijurcevic1@uniri.hr, vanja.travas@uniri.hr

Abstract

Water losses in water supply systems cause significant economic and environmental damage. In addition to increasing the costs of drinking water distribution, they also negatively affect water resources, which is particularly critical in areas with limited water availability. Despite efforts to reduce them, water losses in the Republic of Croatia still account for a significant share of total consumption, averaging up to 50% of abstracted water volumes. The assessment of water losses is based on specific performance indicators of the water utility infrastructure, among which the Infrastructure Leakage Index (ILI), proposed by the International Water Association, is particularly important. ILI is defined as the ratio of current real losses to unavoidable losses. This paper presents the theoretical basis for the assessment of the ILI indicator, with emphasis on the key parameters influencing it (real and unavoidable losses, pipeline length, average system pressure, and the number of consumers). A practical example of ILI assessment was also provided, based on a hydraulic model of a selected District Metered Area (DMA). Using the EPANET software, pressures within the given DMA zone were modeled, and the obtained data were used to estimate real and unavoidable water losses. The analysis identified areas within the DMA zone that require the implementation of measures to reduce water losses and improve the operational efficiency of the system. It was concluded that reducing the ILI indicator to a target value can only be achieved through the iterative application of numerical analyses and field measurements.

Key words: *Water supply systems, losses, ILI indicator, DMA zone, EPANET*

1. Uvod

Učinkovito upravljanje vodoopskrbnim sustavima jedno je od temeljnih obaveza suvremenog društva. Kvalitetna i kontinuirana opskrba pitkom vodom ključna je za zdravlje stanovništva, gospodarski razvoj i očuvanje okoliša. Iako se tehnologije i metode distribucije sanitarno ispravne vode neprestano unapređuju, gubici vode u vodoopskrbnim sustavima i dalje predstavljaju najveći izazov u sektoru vodoopskrbe, čije rješavanje spada u poslovanje isporučitelja vodnih usluga (JIVU), odnosno komunalnih društva.

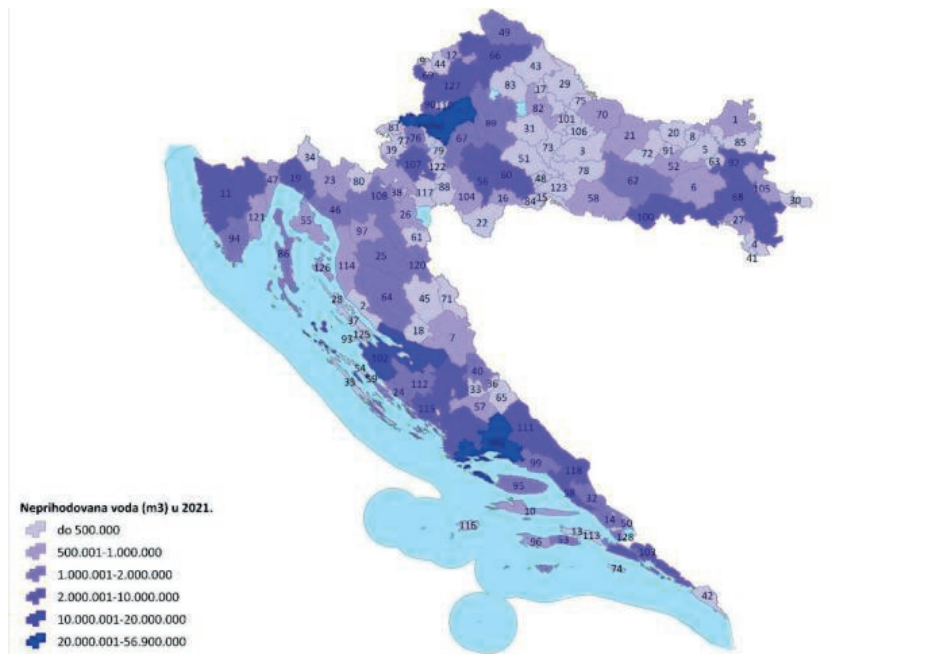
Gubici vode odnose se na razliku između količine vode koja se upušta u distribucijski sustav (zahvaćena voda) i količine vode koja se u konačnici naplaćuje krajnjim korisnicima (prihodovana voda). Na taj način, gubici ne podrazumijevaju samo dio asociran na puknuća cijevi ili spojeva između cijevi, već uključuju i gubitke koji se mogu dovesti u vezu s administrativnim pogreškama, nelegalnim priključcima vode, neispravnim brojila i drugim razlozima koji će uzrokovati neprihodovanu vodu čiji je prostorni raspored za RH prikazan na Slici 1 te je određena razlikom [1]

$$\text{neprihodovana voda} = \text{zahvaćena voda} - \text{prihodovana voda} . \quad (1)$$

Posebno važno je prepoznati kako se potreba za redukcijom gubitaka vode iz vodoopskrbnih sustava može dovesti u vezu s mjerama prilagodbe na klimatske promjene i putem principa racionalnog korištenja vode. Osim toga, treba primijetiti kako je redukcija gubitaka vode iz vodoopskrbnih sustava neophodna i radi održivog razvoja te da isti generiraju relativno velike financijske gubitke koji se onda moraju na neki način kompenzirati. S druge strane, redukcija gubitaka vode iz vodoopskrbnih sustava će isto tako zahtijevati relativno velika financijska sredstva te se za podmirivanje istih nameće ideja da se cijena vode ne postavlja na temelju isporučenih količina, nego na temelju zahvaćenih količina. Istovremeno, treba napomenuti kako se ovakvom mjerom mogu očekivati značajna poskupljenja vode jer danas nije teško naići na vodoopskrbni sustav koji gubi više od 50 % vode, a u nekim slučajevima čak i 80 i više posto. U tom smislu treba napomenuti kako se cijena vode u RH sastoji od: (i) fiksnog i (ii) varijabilnog dijela [1]. Prateći cijene vode kroz proteklih nekoliko godina, prosječna cijena vode koju je plaćalo stanovništvo u 2021. godini iznosila je 2,21 €/m³, a raspon cijena kretao se od 1,26 €/m³ do 4,43 €/m³ [2]. Primjerice, u Rijeci od 1. srpnja 2024. godine fiksni dio iznosi 2,27 €/mjesečno, a varijabilni dio 1,31 €/m³.

Kako bi se dodatno motivirala redukcija vodnih gubitaka, 1. siječnja 2025. godine, nakon što je već nekoliko puta odgođena njena primjena zbog mogućeg negativnog utjecaja na građane i gospodarstvo, stupila je na snagu Uredba o visini vodnog doprinosa i naknade za korištenje voda prema kojoj vodni gubici postaju ključni faktor u obračunu naknade za vodu [1,3].

U cilju smanjenja vodnih gubitaka, novi model obračuna naknada za vodu predviđa diferencirani pristup prema učinkovitosti komunalnih društava. Tako će ona društva koja uspiju smanjiti gubitke ispod 25 % imati pravo na niže naknade, dok će oni s višim gubicima snositi veće troškove, što posljedično može dovesti do rasta cijene vode za krajnje korisnike. Ipak, porast cijene za građane ograničen je na maksimalnih 0,4 €/m³. Model je usmjeren na poticanje ulaganja u infrastrukturu, unapređenje upravljanja sustavima te osiguranje pravednijeg sustava naplate. Ključne mjere uključuju funkcionalno objedinjavanje manjih javnih isporučitelja vodnih usluga (u nastavku: JIVU), i to radi postizanja veće operativne učinkovitosti te uvođenje suvremenih mjernih, nadzornih te telekomunikacijskih sustava.



Slika 1. Prostorni raspored neprihodovalane vode u RH za 2021. godinu [1]

2. Plan upravljanja vodnim gubicima

Plan upravljanja vodnim gubicima je strateško-operativni dokument koji definira ciljeve, mjere i aktivnosti usmjerene na smanjenje gubitaka vode unutar vodoopskrbnog sustava u RH te je njegova izrada i provedba obvezna za sve JIVU u skladu s Zakonom o vodnim uslugama [4].

Esencijalni dio plana upravljanja vodnim gubicima je prethodna izrada tzv. bilance vode koja omogućuje procjenu stvarnih i prividnih gubitaka vode, tj. gubitaka vode nastalih radi netočnog mjerenja, administrativnih pogreški te neovlaštene potrošnje vode. Bilanca vode temelji se na osnovnoj jednadžbi očuvanja mase te je u najopćenitijem obliku određena jednadžbom [1]

$$\sum U - \sum I = \Delta V \quad (2)$$

gdje je $\sum U$ ukupna količina vode koja ulazi u sustav, $\sum I$ količina vode koja se iz sustava isporučuje korisnicima, a ΔV promjena u zalihama vode unutar sustava (npr. akumulacija). Kroz sustavno praćenje ove bilance moguće je identificirati razlike koje ukazuju na gubitke, čime se bilanca ne koristi samo kao analitičko sredstvo, već i kao temelj za planiranje i ocjenjivanje učinkovitosti mjera predviđenih Planom upravljanja vodnim

gubicima. Takav pristup omogućuje prelazak s reaktivnog na proaktivno upravljanje sustavom vodoopskrbe.

S obzirom na to da je cjelovita sanacija vodoopskrbnog sustava u pravilu izuzetno skupa i vremenski zahtjevnja [5], u praksi se sve više primjenjuje pristup selektivne prostorne analize gubitaka. U tu svrhu, ključnu ulogu imaju tzv. DMA zone (engl. District Metered Areas) odnosno zatvorene, hidraulički kontrolirane cjeline unutar vodoopskrbne mreže koje imaju poznate ulazne protoke i, po mogućnosti, potpuno poznate izlaze protoke. Primjenom vodne bilance unutar svake DMA zone može se dobiti detaljniji uvid u prostornu raspodjelu gubitaka cijele vodoopskrbne mreže, što predstavlja osnovu za prioritarno i ciljano upravljanje sanacijama u mreži.

Na temelju vodne bilance provedene unutar pojedinih DMA zona moguće je odrediti količinu gubitaka vode u svakom pojedinom dijelu mreže. Međutim, sama vrijednost gubitka, izražena u apsolutnim količinama (npr. m^3/dan), nije dovoljna za donošenje odluka o prioritetima sanacije. Naime, apsolutni gubitak ne uzima u obzir specifične karakteristike DMA zone, pa je za određivanje prioritete liste sanacije nužno u analizu uključiti i dodatne faktore kao što su: duljina cjevovoda unutar DMA zone, broj korisničkih priključaka, prosječni tlak u sustavu, itd. Upravo zbog toga se sve češće koristi tzv. ILI pokazatelj [1,6] (engl. Infrastructure Leakage Index), odnosno relativni pokazatelj koji omogućuje standardiziranu usporedbu gubitaka između različitih DMA zona unutar sustava. Na taj se način mogu uspostaviti i liste prioriteta sanacija koje se ne temelje samo na iznosu gubitaka u pojedinim DMA zonama, već je predmetna lista time normirana uvažavajući i druge relevantne faktore (kao što je dužina cjevovoda koja će zasigurno otežati lokalizaciju curenja ili pak broj kućnih priključaka čijim će porastom rasti i važnost sanacije).

Tablica 1. Ocjena sustava prema ILI pokazatelju.

ILI pokazatelj	Ocjena efikasnosti	Opis
< 1,5	Vrlo visoka učinkovitost	Izvrсна kontrola gubitaka, gotovo optimalna razina
1,5 – 3,0	Dobra učinkovitost	Sustav ima relativno dobre prakse upravljanja gubicima
3,0 – 5,0	Umjerena učinkovitost	Postoji prostor za poboljšanje upravljanja gubicima
> 5,0	Niska učinkovitost	Sustav ima visoke stvarne gubitke – potrebna je ozbiljna rekonstrukcija ili optimizacija

2.1 ILI pokazatelj

ILI pokazatelj se računa kao omjer stvarnog (izmjenjenog) gubitka vode i tzv. tehnički minimalnog gubitka, odnosno one razine gubitaka koja se smatra neizbježnom s obzirom na fizičke karakteristike sustava (duljinu cijevi, broj priključaka i prosječne tlakove). Na taj način, ILI pokazatelj ne ukazuje samo koliko vode se gubi, već koliko se učinkovito upravlja gubicima s obzirom na okolnosti pojedine DMA zone. Primjenom ILI pokazatelja u analizi DMA zona dobiva se objektivna podloga za rangiranje područja prema potrebi za intervencijom, pri čemu se sanacijske mjere mogu fokusirati na dijelove mreže s nerazmjerno visokim gubicima u odnosu na njihovu fizičku i operativnu složenost. Temeljem navedenoga, ILI pokazatelj će biti određen omjerom [7]

$$ILI = \frac{\text{stvarni gubici}}{\text{neizbježni gubici}} \quad (3)$$

te se zavisno o njegov iznosu vodoopskrbne mreže mogu kategorizirati kako je prikazano u Tablici 1. Iznalaženje iznosa veličina koje sudjeluju u omjeru je prikazano u nastavku.

2.2 Procjena stvarnih gubitaka

Za izračun ILI pokazatelja (3), neophodno je procijeniti količinu stvarnih gubitaka vode iz vodoopskrbnog sustava. Stvarni gubici obuhvaćaju curenja na cjevovodima, svim spojnim elementima, armaturama i rezervoarima te predstavljaju onu količinu zahvaćene vode koja nije dospjela do korisnika. Osnovu za njihovu procjenu čini standardizirana vodna bilanca prema IWA metodologiji (Međunarodna udruga za vode odnosno International Water. Association), kojom se ukupna količina zahvaćene vode uspoređuje s količinama fakturirane i nefakturirane potrošnje. Razlika će u tom slučaju predstavljati ukupne gubitke, koji se zatim mogu dekomponirati na stvarne i prividne gubitke (netočna očitavanja, neovlaštena potrošnja, itd.).

Procjena stvarnih gubitaka najčešće se temelji na analizi minimalnog noćnog protoka u zatvorenim DMA zonama [8] budući da je tada stvarna legalna potrošnja minimalna, pa se višak protoka može pripisati curenju. Osim toga, koriste se i drugi analitički alati i empirijski modeli koji uključuju duljinu mreže, broj priključaka, prosječne tlakove u sustavu te često i broj zabilježenih kvarova. U slučajevima kada nisu dostupna cjelovita mjerenja, stvarni gubici se procjenjuju i temeljem iskustvenih koeficijenata ili stručne ekspertize, pri čemu se uzima u obzir vrsta cijevi, starost infrastrukture i tehničko stanje mreže. Ovakvim pristupom osigurava se dovoljno pouzdana osnova za proračun ILI pokazatelja (3),

čime se u konačnici omogućuje objektivna usporedba gubitaka između različitih DMA zona ili pak cjelovitih vodoopskrbnih sustava.

2.3 Procjena neizbježnih gubitaka

Procjena neizbježnih gubitaka (engl. Unavoidable Annual Real Losses – UARL) predstavlja procjenu najmanje moguće količine stvarnih gubitaka vode koja se može postići čak i u tehnički vrlo dobro održavanom sustavu. To znači da su ti gubici neizbježni zbog same prirode sustava, materijala, spojeva, priključaka, tlakova i brojnih vanjskih faktora, iako se sve sanacije provode optimalno.

Radi potrebe za kvantitativnim vrednovanjem tih minimalnih, tehnički neizbježnih gubitaka, razvijena je empirijska jednadžba koja omogućuje njihovu procjenu na godišnjoj razini. Jednadžba je rezultat višegodišnjih terenskih istraživanja i analize performansi velikog broja vodoopskrbnih sustava [1,9] te ima oblik

$$\text{neizbježni gubici} = \frac{\bar{p}}{n_c} \cdot (18 l_m + 0,8 n_c + 25 l_p) \quad (4)$$

gdje je $\bar{p}$ srednji tlak u barima, n_c broj kućnih priključaka, l_m duljina tlačne mreže u metrima te l_p duljina priključaka u metrima. Treba prepoznati kako jednadžba nije dimenzionalno homogena te da se članovi u istoj moraju pojaviti u navedenim mjernim jedinicama. U tom slučaju će ishod proračuna biti dan u litrama po priključku u danu. Pritom, predmetna jednadžba se može napisati i u obliku

$$\text{neizbježni gubici} = \frac{\bar{p}}{l_m} \cdot (18 l_m + 0,8 n_c + 25 l_p) \quad (5)$$

pa će u tom slučaju lijeva strana biti dana u litrama po kilometru mreže u danu. Važno je napomenuti kako je prethodna jednadžba modificirana za potrebe primjene na vodoopskrbne sustave u RH [1] te se u tu svrhu koristi model

$$\text{neizbježni gubici} = \bar{p} \cdot (6,57 l_m + 0,256 n_c + 9,13 l_p) \quad (6)$$

u kojem oznaka l_p ima modificirano tumačenje, a odnosi se na dužinu cijevi priključaka koja je u vlasništvu JIVU [1].

3. Numerički primjer

U nastavku je prikazan numerički primjer procjene ILI parametra realne DMA zone koja je sastavni dio vodoopskrbne mreže u Rijeci te je

provedena i analiza promjene ILI pokazatelja za slučaj da se provedu neke intervencije [10] kojima bi se zasigurno djelovalo na postojeće gubitke.

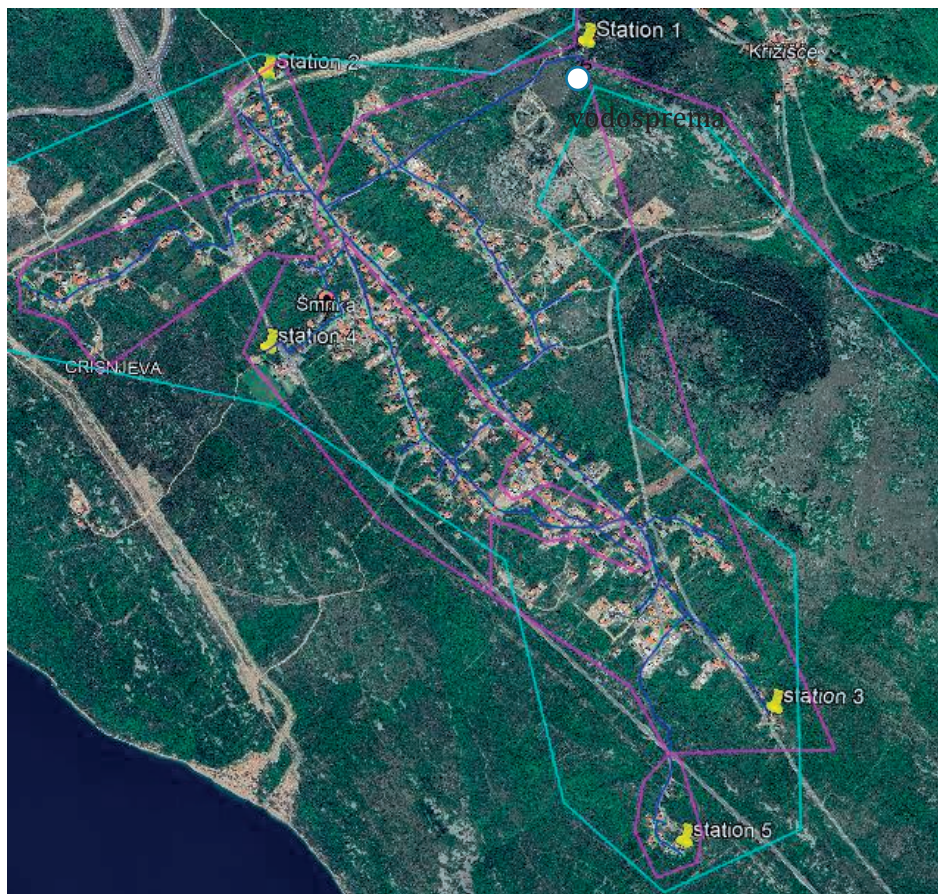
3.1 Pilot područje

Za izradu numeričkog primjera je izabran vodoopskrbni sustav Šmrika, koji je u sastavu komunalno društvo vodovod i kanalizacija Rijeka (u nastavku: KD VIK Rijeka). Dakle, Šmrika je naselje smješteno u Primorsko-goranskoj županiji, unutar područja vodoopskrbnog sustava Kraljevica-Bakar. Radi se o manjem naselju koje karakterizira kombinacija stambenih objekata i sezonskih turističkih kapaciteta, što utječe na promjenjivu potrošnju vode tijekom godine. Vodoopskrba naselja Šmrika osigurana je kroz sustav cjevovoda koji se povezuje s glavnim vodoopskrbnim sustavom Kraljevica-Bakar. Ukupna mreža obuhvaća 184 čvorova i oko 8,5 km cijevi, čime je moguće osigurati pitku vodu svim korisnicima tog naselja. Važno je napomenuti kako upravo u promatranoj mreži dolazi do vodnih gubitaka koji smanjuju učinkovitost sustava i dostupnost vode krajnjim korisnicima. Naselje Šmrika upravo je stoga definirano kao posebna DMA zona unutar šireg sustava.

Prostorni raspored vodoopskrbne mreže Šmrika, zajedno s položajem vodospreme, prikazan je na Slici 2. Ukupna dužina predmetne tlačne mreže (l_m) iznosi 8,48 km dok je na istu priključeno 174 kućnih priključaka (n_c), a prosječna dužina priključka je utvrđena iznosom od 2 metra. Za izračun tlakova u sustavu prema projektiranim potrošnjama, korišten je računalni model mreže izrađen u programu EPANET [11] te je piezometarska kota H tlaka određena s

$$H = z + h \quad (7)$$

gdje je z visinska kota čvora u mreži, a h piezometarska visina u metrima.

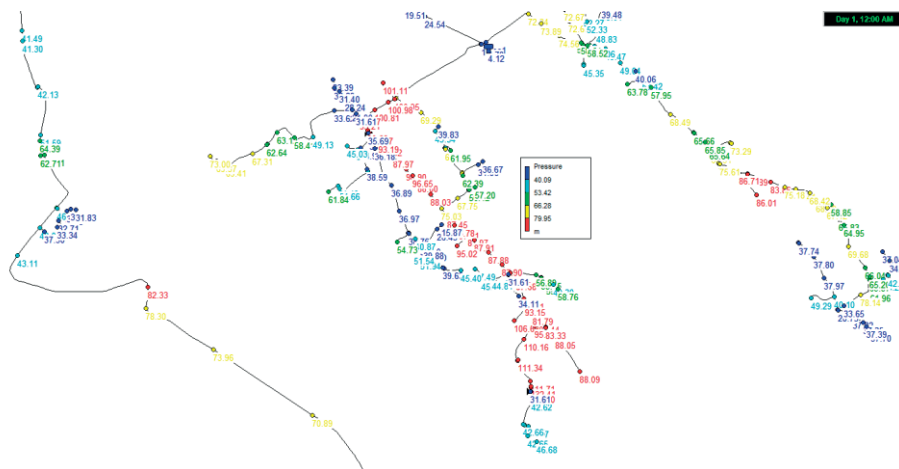


Slika 2. Prikaz vodoopskrbne mreže Šmrika (plava linija prikazuje raspored cjevovoda, a žuti markeri zatvorene krajeve dionica)

3.2 Analiza postojećeg stanja

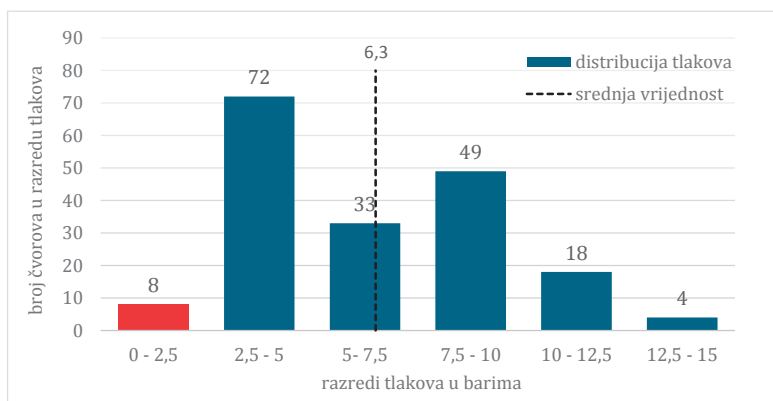
Analiza postojećeg stanja vodoopskrbnog sustava provedena je s ciljem utvrđivanja ključnih karakteristika mreže, funkcionalnosti sustava, razine tlakova te potrošnje vode. Za potrebe izrade računalnog modela predmetne vodoopskrbne mreže korišteni su podaci dobiveni od komunalnog društva VIK Rijeka. Upravo na temelju tih podataka, koji između ostalog uključuju tlakove u čvorovima, duljinu cjevovoda i potrošnju vode za svaki čvor u promatranoj DMA zoni, proveden je proračun ILI pokazatelja. U tu svrhu je bilo neophodno odrediti srednju vrijednost tlakova $\bar{p}$ te je distribucija istih prikazana na Slici 3. Na istoj slici valja primijetiti kako su maksimalni tlakovi grupirani u najnižoj cijevi, ali treba i primijetiti kako se i na ovom prikazu može prepoznati da se radi o

relativno velikoj varijaciji tlakova (kako po iznosu, tako i u prostornom rasporedu).

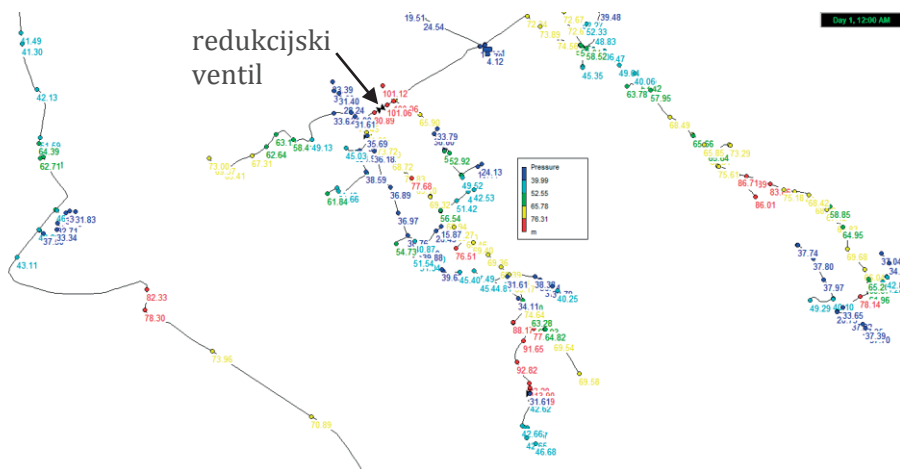


Slika 3. Raspored piezometarskih visina za projektiranu potrošnju u postojećem stanju vodoopskrbne mreže Šmrika

Srednja vrijednost tlakova u sustavu iznosi 6,3 bara (63 mVS). Pritom, treba primijetiti kako su varijacije tlakova u mreži značajne te se mogu ilustrirati dijagramom prikazanim na Slici 4 u kojoj je učestalost pojavljivanja tlakova prikazana u razredima koji imaju raspon od 2,5 bara. Na taj način, može se prepoznati kako 8 čvorova imaju tlak manji od minimalnih 2,5 te da postoje i čvorovi s relativno visokim tlakovima koji su u predmetnom kontekstu neprihvatljivi. Štoviše, iz razloga koji su navedeni u nastavku, relativno velike varijacije u tlaku će otežati upravljanje sustavom.



Slika 4. Učestalost pojavljivanja tlakova za projektiranu potrošnju u postojećem vodoopskrbnom sustavu Šmrika (crvena boja označava tlakove manje od 2,5 bara)



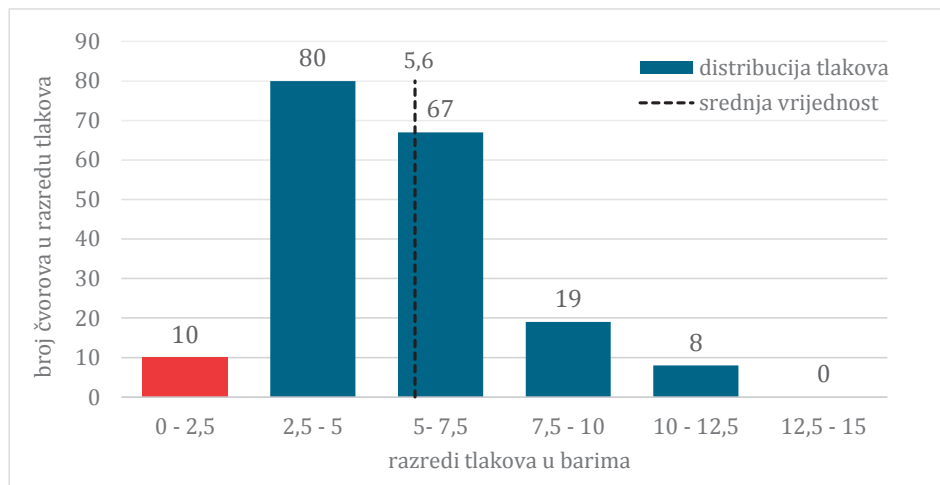
Slika 5. Raspored piezometarskih visina za projektiranu potrošnju u prilagođenom stanju vodoopskrbne mreže Šmrika

Treba primijetiti da će se oštećenjima u vodoopskrbnoj mreži generirati protočne površine kroz koje će se ostvarivati gubici vode, ali da će i protoci curenja vode zavisiti o brzini istjecanja koja je direktno vezana za tlak u sustavu. Dakle, lako se složiti da će veći tlakovi u sustavu generirati i veće gubitke iz sustava, pa se stoga i za redukciju istih često koristi nezahvalna mjera redukcije tlakova (koji se mogu obarati samo do određene granice, odnosno do granice koja neće ugrožavati protupožarnu zaštitu).

Za izračun ILI pokazatelja za postojeće stanje predmetnog vodoopskrbnog sustava potrebno je raspolagati podacima procijenjenih stvarnih gubitaka te su u te svrhe korišteni podaci dostavljeni od strane KD VIK. Dakle, temeljem jednadžbe očuvanja mase odnosno bilance vode (2), terenskim mjerenjima je utvrđeno kako predmetna mreža u prosjeku gubi oko 37,5 % vode koja je ušla u sustav, odnosno oko 35,949 m³ vode (ukupni godišnji ulaz je za 2017. godinu iznosio 95,807 m³, dok se fakturirani iznos vode odnosio na 59,858 m³ vode). Temeljem navedenoga te primjenom jednadžbe (3) i (6) utvrđeno je kako ILI pokazatelj u tom slučaju iznosi 4,9, što prema Tablici 1 označava sustav koji se nalazi na pragu između umjerene i niske učinkovitosti.

3.3 Prijedlog redukcijskih mjera

Kako bi se reducirali gubici u analiziranom sustavu, proveden je niz računalnih simulacija tlakova za različite položaje tzv. redukcijskih ventila [12] kojima se nizvodni tlak reducira do zadanog iznosa. Predloženi položaj za ugradnju redukcijskog ventila je prikazan na Slici 5 koja prikazuje prostorni raspored tlakova dobiven ugradnjom ovakvog ventila kojim se provodi redukcija nizvodnih tlakova za 2 bara.



Slika 6. Učestalost pojavljivanja tlakova za projektiranu potrošnju u prilagođenom vodoopskrbnom sustavu Šmrika (crvena boja označava tlakove manje od 2,5 bara)

Kako bi se ilustrirao učinak ugradnje redukcijskog ventila na predmetnom mjestu, prikladno je prikazati distribuciju tlakova po istim razredima kao i ranije (Slika 4). Naime, kako je prikazano na Slici 6, ugradnjom redukcijskog ventila srednja vrijednost tlaka reducirana je s prethodnih 6,3 bara na 5,6 bara (što predstavlja redukciju od značajnih 0,7 bara), ali je uz to i ostvarena povoljnija preraspodjela tlakova, tako da onih maksimalnih tlakova više nema. Drugim riječima, ovakvom intervencijom će se zasigurno smanjiti postojeći gubici vode te uz to i olakšati upravljanje sustavom. Štoviše, treba primijetiti da predloženom mjerom redukcije tlakova, čije provođenje može ugroziti uvjet od minimalnih 2,5 bara u mreži, isti nije kompromitiran jer se i povećani broj čvorova u tom rasponu tlakova nalazi na višim kotama gdje se i očekuju manji tlakovi (7), a i obzirom na njihov broj, isti se po potrebi mogu lokalno podići hidroforima.

U nastavku će se ispitati kako bi tehničko rješenje ugradnje redukcijskog ventila utjecalo na ILI pokazatelj predmetne vodoopskrbne mreže. Pritom, u tu svrhu treba prepoznati kako će isto utjecati samo na iznos, tj. procjenu neizbježnih gubitaka vode određenih jednadžbom (6), dok će stvarni gubici vode biti isti kao i ranije. Naime, navedeno je važno prepoznati kako bi se ispravno interpretirao dobiveni zaključak. Dakle, kako je ranije navedeno, redukcijom tlakova je opravdano očekivati opadanje vodnih gubitaka zato što se time smanjuju izlazne brzine istjecanja, a time onda i protoci curenja. S druge strane, brojnik u definiciji (3), koji predstavlja ukupne gubitke, ostat će isti kao i ranije, što će rezultirati na način da će ILI

pokazatelj porasti. Naime, za dostizanje istih gubitaka s manjim tlakovima potreban je veći broj puknuća. U tom slučaju je ILI prešao vrijednost 5.

4. Zaključak

U radu je dan sažet pregled izračuna tzv. ILI pokazatelja za ocjenu stanja vodoopskrbnog sustava obzirom na vodne gubitke u njemu. Izračun istoga je prikazan na primjeru vodoopskrbne mreže Šmrika u Rijeci. U tu svrhu su od strane KD VIK Rijeka dostavljeni podaci stvarnih gubitaka vode, dok su oni neizbježni gubici vode prognozirani empirijskim modelom adaptiranim za područje RH. Za prognozu prosječnih tlakova u sustavu, koji se dovode u vezu s projektiranom potrošnjom sustava, korišten je računalni model mreže izrađen u programu EPANET. Predmetna analiza je pokazala kako je za postojeće stanje ILI pokazatelj predmetne mreže u granicama između umjerene i niske učinkovitosti. Kako bi se reducirao iznos gubitaka vode, u nastavku je ispitana mjera redukcije tlakova u sustavu te je tako proveden veći broj računalnih simulacija u kojima se mijenjao položaj redukcijskog ventila te iznos redukcije tlakova. Za odabrani položaj ovakvog ventila provedena je analiza tlakova u sustavu te je utvrđeno kako je polje tlaka istim unaprijeđeno jer su se maksimalni tlakovi reducirali, pa je i reduciran iznos srednjeg tlaka u sustavu (čime su se smanjili i gubici). Pritom, pokazano je i komentirano kako ovakva intervencija može povoljno utjecati na redukciju gubitaka, ali kako će bez ponovnih terenskih mjerenja stvarnih gubitaka utjecati nepovoljno na ILI pokazatelj. Naime, za manje tlakove u sustavu se ti isti realni gubici mogu doseći samo većim brojem oštećenja koja će se onda odraziti na porast ILI pokazatelja. Dakle, iako bi se redukcijskim ventilom zasigurno smanjili gubici u mreži, za novu je procjenu ILI pokazatelja neophodno izvesti predmetne mjere te onda i provesti ponovno terenska ispitivanja stvarnih gubitaka vode.

Literatura

- [1] Hrvatske vode. (2024) Nacionalni akcijski plan smanjenja gubitaka vode u Republici Hrvatskoj. Zagreb: Hrvatske vode.
- [2] Grad Rijeka. (2023) Od 1. kolovoza 2023. godine poskupljuju vodne usluge. *rijeka.hr*. URL: <https://www.rijeka.hr/od-1-kolovoza-2023-godine-poskupljuju-vodne-usluge/> (posjećeno 14. 6. 2025.).
- [3] Hrvatski sabor. (2019) Prijedlog zakona o vodnim uslugama, s Konačnim prijedlogom zakona. *sabor.hr*. URL:

- <https://www.sabor.hr/sites/default/files/uploads/sabor/2019-01-18/081049/PZ36.pdf> (posjećeno 14. 6. 2025.).
- [4] Republika Hrvatska. (2018) Zakon o vodnim uslugama. *Narodne novine*, broj 56/2018. URL: <https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/201805561126.html> (posjećeno 14. 6. 2025.).
 - [5] Bolognesi, A., Lenzi, C., Bragalli, C., Fortini, M. (2014) Infrastructure Leakage Index Assessment in Large Water Systems. *Procedia Engineering*, 70, str. 1017–1026.
 - [6] Winarni, W. (2009) Infrastructure Leakage Index (ILI) as Water Losses Indicator. *Civil Engineering Dimension*, 11(2), str. 126–134.
 - [7] Polachova, M., Tuhovčák, L. (2024) Determination of Infrastructure Leakage Index (ILI) Using Analyses of Minimum Night Flows. *Engineering Proceedings*, 69(1), str. 211.
 - [8] Kadu, M. S., Dighade, R. R. (2015) Infrastructure Leakage Index and Challenges in Water Loss Management in Developing Countries. U: *Proceedings of the World Environmental and Water Resources Congress 2015*, str. 1322–1331.
 - [9] Yilmaz, S., Firat, M., Özdemir, Ö. (2022) Using the Infrastructure Leakage Index (ILI) Indicator for Effective and Sustainable Leakage Management: Importance, Advantages and Challenges. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 40(4), str. 715–723.
 - [10] Giustolisi, O., Ciliberti, F. G., Mazzolani, G., Laforgia, D. (2024) Effectiveness of Water Loss Performance Indicators for Asset Management. *Digital Water*, 2(1), str. 1–31.
 - [11] Rossman, L. A. (2000) EPANET 2 User's Manual. Cincinnati: U.S. Environmental Protection Agency.
 - [12] Vouk, D., Poljak, V., Kovač, J., Jelić, L. (2017) Utjecaj opružnog ventila na učinkovitost vodoopskrbnih sustava. *Građevinar*, 69.

EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE UTJECAJA SUPERPLASTIFIKATORA NA SVOJSTVA MORTA

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF SUPERPLASTICIZER EFFECT ON MORTAR PROPERTIES

Andrina Mišan*, Natalija Bede Odorčić *

Sažetak

Ovaj rad bavi se istraživanjem utjecaja superplastifikatora na obradivost i mehanička svojstva cementnog morta pri starosti od 2 i 7 dana. Cilj istraživanja bio je ispitati kako različiti udjeli i načini (vrijeme) doziranja superplastifikatora utječu na svojstva svježeg i očvrslog morta, s naglaskom na tlačnu i vlačnu čvrstoću te obradivost. Superplastifikator je dodavan u udjelima od 0 %, 0,5 % i 1 % s obzirom na masu cementa, dok je vodocementni omjer u svim mješavinama držan konstantnim. Rezultati pokazuju da su mješavine s dodatkom superplastifikatora ostvarile veće tlačne i vlačne čvrstoće te obradivost u usporedbi s referentnim mješavinama bez dodatka. Posebno je uočeno da je učinkovitost aditiva značajno veća kada se dodaje zajedno s vodom u početnoj fazi miješanja sastojaka morta, dok je naknadno dodavanje u već izmiješanu svježju mješavinu rezultiralo manjim porastom čvrstoće. Ovi rezultati ukazuju na važnost ne samo pravilnog doziranja, već i načina primjene superplastifikatora. Navedeno upućuje da dodatak superplastifikatora pozitivno utječe na obradivost i mehanička svojstva morta, pri čemu pravilno projektiranje mješavine te odabir količine i optimalnog trenutka dodavanja aditiva igraju ključnu ulogu u postizanju željenih svojstava.

Ključne riječi: cementni mort, superplastifikator, obradivost, tlačna čvrstoća, vlačna čvrstoća savijanjem

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: amisan@student.uniri.hr, natalija.bede@uniri.hr

Abstract

This paper investigates the influence of superplasticizers on the workability and mechanical properties of cement mortar at the ages of 2 and 7 days. The aim of the study was to examine how different dosages and timing of superplasticizer incorporation affect the properties of fresh and hardened mortar, with focus on compressive and flexural strength as well as workability. Superplasticizer was added in proportions of 0%, 0.5%, and 1% by cement mass, while the water-cement ratio was kept constant in all mixtures. The results show that mixtures containing superplasticizer achieved higher compressive and flexural strengths, as well as improved workability, compared to the reference mixture without admixture. It was particularly observed that the effectiveness of the admixture is significantly higher when added together with water during the initial mixing phase of the mortar components, while adding the admixture after initial mixing of the fresh mortar resulted in a smaller increase in strength. These findings highlight the importance not only of correct dosing but also of the timing of superplasticizer application. This indicates that the addition of superplasticizer has a positive impact on the workability and mechanical properties of mortar, where proper mix design and the choice of the optimal timing for admixture addition play the key role in achieving the desired properties.

Key words: cement mortar, superplasticizer, workability, compressive strength, flexural strength

1. Uvod

U suvremenoj proizvodnji cementnih kompozita, poput betona i morta, kemijski se dodaci sve češće primjenjuju u svrhu poboljšanja ili modifikacije svojstava u svježem i očvrslom stanju. Kemijski dodaci, dostupni u tekućem obliku, dodaju se u malim količinama u odnosu na masu veziva, a neki od najčešće korištenih su aeranti, plastifikatori, superplastifikatori, usporivači i ubrzivači vezivanja. Njihova primjena omogućuje postizanje specifičnih svojstava, poput poboljšane obradivosti svježe mješavine, što olakšava njezinu ugradnju i zbijanje, regulacije vremena vezivanja te povećane otpornosti na agresivne utjecaje iz okoliša [1].

Djelovanje kemijskih dodataka ovisi o njihovim fizikalno-kemijskim svojstvima, kao i o karakteristikama cementa, agregata i međusobnom omjeru svih komponenata u mješavini. Razlog njihove široke primjene proizlazi iz potrebe za prilagodbom specifičnim zahtjevima pojedinih građevinskih projekata i uvjetima izvedbe, ali i iz ekonomskih razloga, poput smanjenja količine cementa ili sitnog agregata. Međutim, valja istaknuti da primjena kemijskih dodataka ne može nadomjestiti nedostatke uzrokovane lošim projektiranjem sastava, nepravilnim

omjerima komponenata, neadekvatnom izvedbom miješanja ili upotrebom sirovina niske kvalitete.

U posljednjih nekoliko godina, uporaba plastifikatora i superplastifikatora bilježi značajan porast, što je rezultat sve strožih zahtjeva za poboljšanjem kvalitete, čvrstoće i trajnosti suvremenih betona, kao i potrebe za smanjenjem troškova ugradnje uslijed porasta cijene energije i smanjene dostupnosti kvalificirane radne snage. Dostupni su isključivo u tekućem stanju i mogu se dozirati na dva načina: dodavanjem zajedno s vodom u početnoj fazi miješanja, ili naknadno, u već pripremljenu svježu mješavinu. U osnovi, ovi dodaci imaju dvostruko djelovanje: omogućuju znatno smanjenje količine vode u mješavini bez gubitka obradivosti ili značajno poboljšavaju obradivost bez povećanja količine vode [2]. Mehanizam njihova djelovanja temelji se na disperziji cementnih čestica, čime se smanjuje međusobno trenje i povećava pokretljivost mješavine, što rezultira znatnim povećanjem obradivosti [1].

Superplastifikatori zbog svog kemijskog sastava predstavljaju napredniju skupinu kemijskih dodataka u odnosu na klasične plastifikatore i omogućuju znatno izraženije smanjenje količine vode potrebne za postizanje željene obradivosti. Time se izravno povećavaju čvrstoća i trajnost očvrstlog betona. Eksperimentalna istraživanja provedena na običnim betonima spravljenim s različitim udjelima superplastifikatora i konstantnim vodocementnim omjerom pokazuju da su mješavine s dodatkom superplastifikatora ostvarile približno 50 – 60 % veću tlačnu čvrstoću nakon 7 dana te oko 70 % veću nakon 28 dana u usporedbi s referentnim uzorcima bez dodatka superplastifikatora [3]. Također, zabilježen je pozitivan učinak na vlačnu čvrstoću betona, što se pripisuje smanjenju poroznosti i povećanju zbijenosti cementne matrice, odnosno većoj gustoći očvrstnalog materijala [4]. Nadalje, prema istraživanju [5], povećanje udjela superplastifikatora uz konstantan vodocementni omjer povećava obradivost i tlačnu čvrstoću betona, no prekoračenjem optimalne količine narušava se kohezivnost i homogenost mješavine, što u konačnici rezultira padom tlačne čvrstoće.

Na temelju pretrage dostupne literature utvrđeno je da znanstveni radovi, osobito oni na hrvatskom jeziku, rijetko zasebno razmatraju utjecaj superplastifikatora na obradivost i mehanička svojstva cementnih kompozita [6,7]. Stoga se ovaj rad fokusira na eksperimentalno istraživanje utjecaja superplastifikatora na svojstva cementnog morta, s naglaskom na obradivost te tlačnu i vlačnu čvrstoću savijanjem, pri čemu je vodocementni omjer u svim mješavinama održavan konstantnim. Laboratorijska ispitivanja provedena su na uzorcima morta s različitim udjelima superplastifikatora (0 %, 0,5 % i 1 % u odnosu na masu

cementa). Ispitivanjem su obuhvaćena svojstva svježeg morta (konzistencija i gustoća) te mehanička svojstva očvrslog morta (vlačna čvrstoća savijanjem i tlačna čvrstoća) pri starosti od 2 i 7 dana. Poseban naglasak stavljen je i na vrijeme doziranja superplastifikatora. Budući da se kemijski dodaci poput superplastifikatora mogu dodavati u mješavinu zajedno s vodom u početnoj fazi miješanja, ili naknadno u već pripremljenu svježju mješavinu, analiziran je i utjecaj trenutka doziranja na promatrana svojstva morta.

2. Materijali i mješavine cementnog morta

Za izradu cementnih mješavina korišten je vapnenački pijesak granulacije 0 – 4 mm, podrijetlom iz kamenoloma Šumber, tvrtke Holcim d.o.o. (Hrvatska). Kao vezivo upotrijebljen je cement tipa CEM II/A-LL 42,5 R, gustoće $3,08 \text{ g/cm}^3$. Više informacija o fizikalnim i kemijskim svojstvima cementa dostupno je na stranici proizvođača [8]. Riječ je o portlandskom cementu s dodatkom vapnenca, koji udovoljava zahtjevima norme HRN EN 197-1 [9]. Sastav cementa uključuje 80 – 94 % portlandskog cementnog klinkera, 6 – 20 % prirodnog vapnenca (LL), te do 5 % filtarske prašine nastale tijekom proizvodnog procesa klinkera. Kao kemijski dodatak korišten je univerzalni superplastifikator na bazi modificiranih akrilnih polimera s pH vrijednošću u rasponu od 3,5 do 5,5 te gustoćom od $1,05$ do $1,09 \text{ g/cm}^3$ [10]. Preporučena doza primjene iznosi od 0,2 % do 2,0 % mase cementa, dok maksimalna dozvoljena količina iznosi 2,5 %. Ovaj dodatak razvijen je s ciljem smanjenja količine upotrijebljene vode u betonskoj mješavini, bez negativnog utjecaja na obradivost svježeg betona. Primjenom ovog dodatka moguće je postići povećanu tlačnu čvrstoću, smanjenu propusnost te poboljšanu trajnost očvrsnulog betona. Unatoč smanjenju vode, viskoznost svježje betonske mješavine ostaje niska, što omogućuje lakšu ugradnju i bolje svojstvo zbijanja.

Ukupno je pripremljeno osam mješavina cementnog morta, izrađenih u skladu sa zahtjevima norme HRN EN 196-1 [11]. Sve mješavine imale su standardni sastav s omjerom cementa, pijeska i vode $450 \text{ g} : 1350 \text{ g} : 225 \text{ g}$, pri čemu je vodocementni omjer bio konstantan i iznosio 0,5, dok se količina superplastifikatora mijenjala. Proces miješanja započinjao je dodavanjem vode pa cementa. Nakon 30 sekundi miješanja, u sljedećih 30 sekundi dodavan je pijesak u posudu miješalice, nakon čega je miješanje nastavljeno još 30 sekundi. Nakon pauze od 90 sekundi, svi su sastojci promiješani još 60 sekundi. Superplastifikator je dodavan u udjelima od 0,5 % i 1,0 % mase cementa, s ciljem ispitivanja njegova utjecaja na obradivost i mehanička svojstva cementnog morta. U slučajevima kada je upotreba superplastifikatora bila unaprijed predviđena, on je prethodno pomiješan s vodom. Kod mješavina s naknadnim dodavanjem,

superplastifikator se nije miješao s vodom, već je izravno dodan u mješalicu nakon završetka miješanja osnovnih sastojaka (cement, pijesak, voda). U tim slučajevima, nakon dodavanja superplastifikatora u gotovu mješavinu, postupak miješanja nastavljen je dodatnih 120 sekundi.

Od ukupno osam pripremljenih mješavina, četiri su različite, dakle svaka je izrađena dvaput kako bi se osigurali uzorci za ispitivanja mehaničkih svojstava pri starosti od 2 i 7 dana. Pripremljene su dvije referentne mješavine bez dodataka (oznake REF-1 i REF-2), dvije mješavine s dodatkom 0,5 % superplastifikatora (oznake 0,5 % SP-1 i 0,5 % SP-2), te dvije mješavine s dodatkom 1,0 % superplastifikatora (oznake 1 % SP-1 i 1 % SP-2). U navedenim mješavinama superplastifikator je prethodno pomiješan s vodom te zajedno miješan sa svim sastojcima. Uz to, izrađene su još dvije mješavine (oznake 0,5 % SP DOD-1 i 0,5 % SP DOD-2) kod kojih je superplastifikator u jednakom udjelu (0,5 %) dodan naknadno u veći izmiješan mort (nakon završetka miješanja svježe mješavine).

Nakon završetka miješanja u laboratorijskoj mješalici (Slika 1), svježi cementni mort ugrađen je u standardne kalupe dimenzija 40 mm × 40 mm × 160 mm (Slika 2) sukladno metodama za ispitivanje vlačne i tlačne čvrstoće morta prema HRN EN 196-1 [11]. Površina morta poravnana je metalnom mistrijom, a zatim su kalupi vibrirani na vibrostolu kako bi se osiguralo homogeno zbijanje mješavine i uklanjanje zarobljenog zraka pazeći da ne dođe do pojave segregacije. Nakon ugradnje, uzorci su prekriveni staklenom pločicom radi sprječavanja prebrzog isušivanja. Raskalupljivanje je provedeno 24 ± 2 sata nakon miješanja, nakon čega su uzorci njegovani u vodi temperature (20 ± 1) do trenutka ispitivanja mehaničkih svojstava sukladno normi HRN EN 196-1 [11].



Slika 1. Miješalica za pripremu cementnog morta



Slika 2. Cementni mort ugrađen u standardni kalup

3. Laboratorijska ispitivanja cementnog morta

Laboratorijska ispitivanja provedena su u Laboratoriju za materijale Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Rijeci. Svrha ispitivanja bila je istražiti utjecaj različitih udjela i vremena doziranja superplastifikatora na svojstva svježeg cementnog morta te očvrslog cementnog morta pri starosti od 2 i 7 dana pri konstantnom vodocementnom omjeru. Ispitivani su udjeli superplastifikatora od 0 %, 0,5 % i 1,0 % u odnosu na masu cementa.

Za svaku pripremljenu mješavinu najprije su ispitana svojstva svježe mješavine, uključujući gustoću (volumensku masu) u skladu s normom HRN EN 1015-6 [12] i obradivost (konzistenciju pomoću metode rasprostiranja), u skladu s normom HRN EN 1015-3 [13].

Na očvrsnulim uzorcima određena je gustoća (volumenska masa) te su ispitane vlačna čvrstoća savijanjem i tlačna čvrstoća prema normi HRN EN 196-1 [11], koja propisuje standardizirane metode za ispitivanje cementnih mortova. Za svaku mješavinu pripremljen je kalup s jednom serijom od tri ispitna uzorka dimenzija 40 mm × 40 mm × 160 mm. Ukupno je ispitano 24 uzorka, 12 nakon 2 dana i 12 nakon 7 dana od trenutka pripreme, a kako bi se analizirao razvoj mehaničkih svojstava tijekom vremena. Ispitivanja vlačne čvrstoće savijanjem i tlačne čvrstoće provedena su na hidrauličkoj preši s mjernim rasponima do 15 kN za vlačnu čvrstoću, odnosno do 600 kN za tlačnu čvrstoću.

4. Rezultati ispitivanja i analiza rezultata

U Tablici 1 prikazani su rezultati ispitivanja svježeg morta, dobiveni kao srednja vrijednosti dviju mješavina istog sastava. Primjerice, vrijednost prikazana za mješavinu oznake REF predstavlja srednju vrijednost dobivenu iz rezultata ispitivanja uzoraka mješavina REF-1 i REF-2. Na isti način obrađeni su i rezultati ostalih mješavina; primjerice za mješavinu s oznakom 0,5 % SP prikazana vrijednost predstavlja srednju vrijednost rezultata ispitivanja uzoraka 0,5 % SP-1 i 0,5 % SP-2.

Tablica 1. Rezultati ispitivanja svježeg morta

Naziv mješavine		REF	0,5 % SP	1 % SP	0,5 % SP DOD
Gustoća	Srednja vrijednost (kg/m ³)	2220	2270	2230	2320
	Povećanje (%)	0,0	2,3	0,5	4,5
Konzistencija	Srednja vrijednost (mm)	134	221	274	228
	Povećanje (%)	0	65	104	70

U Tablici 2 prikazani su rezultati ispitivanja očvrsllog morta pri starosti od 2 dana, dok Tablica 3 prikazuje rezultate pri starosti od 7 dana. Svaki je rezultat određen kao srednja vrijednost ispitivanja jedne serije uzoraka iste mješavine. Primjerice, vrijednost prikazana za mješavinu označenu kao REF u Tablici 2 predstavlja srednju vrijednost dobivenu iz rezultata uzoraka mješavine REF-1 (2 dana), a u Tablici 3 iz uzoraka mješavine REF-2 (7 dana). Svi dobiveni rezultati ispitivanja uspoređeni su s referentnom mješavinom u cilju dobivanja uvida u utjecaj primjene superplastifikatora na svojstva svježeg i očvrsllog cementnog morta.

Tablica 2. Rezultati ispitivanja očvrsllog morta pri starosti od 2 dana

Naziv mješavine		REF	0,5 % SP	1 % SP	0,5 % SP DOD
Gustoća	Srednja vrijednost (kg/m ³)	2210	2230	2220	2240
	Povećanje (%)	0,0	0,9	0,5	1,4
Vlačna čvrstoća savijanjem	Srednja vrijednost (MPa)	5,8	6,3	6,1	6,0
	Povećanje (%)	0,0	8,3	5,4	3,2
Tlačna čvrstoća	Srednja vrijednost (MPa)	33,0	34,1	34,2	43,0
	Povećanje (%)	0,0	3,2	3,6	30,4

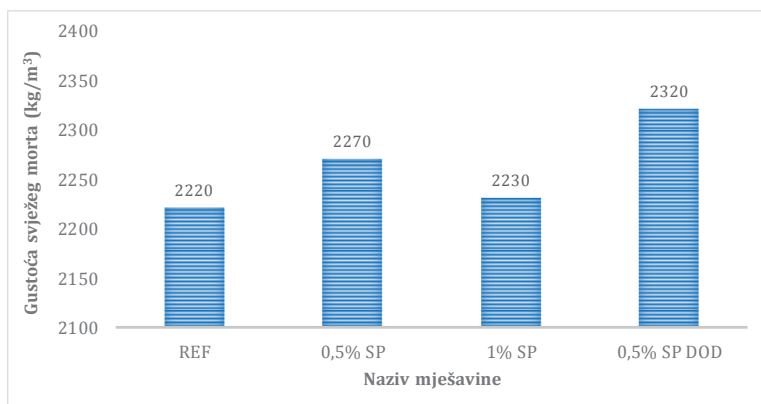
Tablica 3. Rezultati ispitivanja očvrsllog morta pri starosti od 7 dana

Naziv mješavine		REF	0,5 % SP	1% SP	0,5 % SP DOD
Gustoća	Srednja vrijednost (kg/m ³)	2210	2230	2250	2190
	Povećanje (%)	0,0	0,9	1,8	-0,9
Vlačna čvrstoća savijanjem	Srednja vrijednost (MPa)	6,2	6,5	7,0	5,5
	Povećanje/smanjenje (%)	0,0	4,6	12,6	-12,3
Tlačna čvrstoća	Srednja vrijednost (MPa)	44	45	47	41
	Povećanje/smanjenje (%)	0,0	3,5	8,2	-5,4

4.1 Gustoća svježeg morta

Gustoća, odnosno volumenska masa svježeg cementnog morta određena je kao omjer mase i volumena koji mort zauzima kada je ugrađen

u skladu s postupkom propisanim normom HRN EN 1015-6 [12]. Ukupno je provedeno osam ispitivanja, po jedno za svaku pripremljenu mješavinu. Jedan rezultat ispitivanja prikazan na Slici 3 predstavlja srednju vrijednost dviju mješavina istog sastava, zaokruženu na najbližih 10 kg/m^3 , sukladno zahtjevima norme.



Slika 3. Utjecaj superplastifikatora na gustoću svježeg cementnog morta

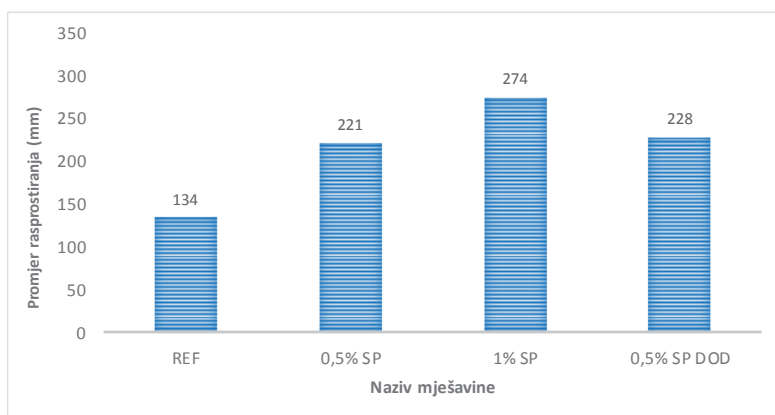
Dobivene vrijednosti kreću se u rasponu od 2220 do 2320 kg/m^3 , što ukazuje na očekivano malu razliku u rezultatima i potvrđuje da dodatak superplastifikatora ima zanemariv utjecaj na povećanje volumenske mase pri nepromijenjenim osnovnim sastojcima. Mješavine s dodatkom superplastifikatora pokazuju blago povećanje gustoće u odnosu na referentnu mješavinu, redom za 2,3 %, 0,5 % i 4,5 % (Tablica 1), što se može pripisati poboljšanoj obradivosti i učinkovitijem zbijanju, čime se omogućuje kompaktnije pakiranje materijala i smanjenje udjela zarobljenog zraka u mješavini.

4.2 Konzistencija svježeg morta

Konzistencija cementnog morta određena je primjenom metode rasprostiranja na potresnom stoliću (Slika 4), sukladno normi HRN EN 1015-3 [13]. Uzorak je pripremljen četvrtanjem, kalup je napunjen u dva sloja, pri čemu se svaki sloj nabija s 10 laganih udaraca. Nakon toga se kalup vadi i slijedi potresanje stolića 15 puta (1 udarac/s). Potom se mjeri srednja vrijednost dvaju međusobno okomitih promjera rasprostrtog morta s točnošću od 1 mm [13]. Jedan rezultat prikazan na Slici 5 predstavlja srednju vrijednost ispitivanja dviju mješavina istog sastava.



Slika 4. Potresni stolić za ispitivanje konzistencije cementog morta rasprostiranjem



Slika 5. Utjecaj superplastifikatora na konzistenciju (promjer rasprostiranja) svježeg cementnog morta

Dodavanje superplastifikatora u mješavinu rezultiralo je značajnim povećanjem promjera rasprostiranja u usporedbi s referentnom mješavinom čija prosječna vrijednost iznosi 134 mm. Mješavina s 0,5 % superplastifikatora pokazala je veću obradivost, s povećanjem od 65 %, dok je primjena istog udjela superplastifikatora u fazi nakon završetka miješanja (0,5 % SP DOD) dala usporedive rezultate s mješavinom 0,5% SP, s povećanjem od 70 % u odnosu na prosječnu vrijednost referentne mješavine. Daljnje povećanje udjela superplastifikatora na 1 % rezultiralo je dodatnim poboljšanjem konzistencije, pri čemu je prosječni promjer rasprostiranja iznosio 274 mm, što predstavlja povećanje od čak 104 % u odnosu na referentnu mješavinu (Tablica 1). Međutim, preveliki udio superplastifikatora može negativno utjecati na kohezivnost i homogenost svježeg cementne mješavine, što je zapaženo kod mješavine s 1% superplastifikatora. Ova pojava može se pripisati prekomjernom

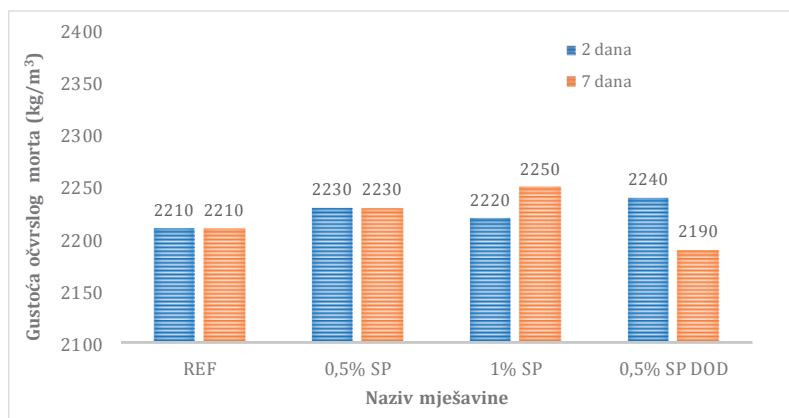
disperzivnom učinku superplastifikatora, koji rezultira odvajanjem vode i cementne paste ili agregata, odnosno dovodi do pojave segregacije [5]. Na Slici 6 (desno) vidljiv je vodeni prsten uz rub potresnog stolića, dok se u središtu ispitnog uzorka zapaža nakupina agregata, što potvrđuje pojavu segregacije pri većem udjelu superplastifikatora.



Slika 6. Obradivost (izražena kroz promjer rasprostiranja) svježeg cementnog morta za uzorke s 0,5 % SP (lijevo) i 1 % SP (desno)

4.3 Gustoća očvrslog morta

Prije ispitivanja čvrstoće uzorci cementnih prizmi su izvagani i izmjerene su im dimenzije, na temelju čega je određena gustoća (volumenska masa) očvrslog morta. Gustoća mješavine određena je kao srednja vrijednost triju standardnih ispitnih uzoraka iz jedne serije. Rezultati su prikazani na Slici 7 za uzorke stare 2 i 7 dana.



Slika 7. Utjecaj superplastifikatora na gustoću očvrslog cementnog morta pri starosti od 2 i 7 dana

Na temelju prikazanih rezultata može se zaključiti da je gustoća svih mješavina, uključujući referentne i one sa superplastifikatorima, relativno konstantna, neovisno o načinu i količini dodavanja superplastifikatora te starosti uzoraka. Uočava se blagi trend porasta gustoće s povećanjem udjela superplastifikatora, bez obzira na starost uzorka. Gustoće morta nakon 2 dana kreću se u rasponu od 2210 do 2240 kg/m³, dok se nakon 7 dana nalaze u rasponu od 2190 do 2250 kg/m³. Nadalje, nakon 7 dana primjećuje se da gustoća referentne mješavine i mješavine s 0,5 % superplastifikatora ostaje gotovo nepromijenjena, dok mješavine s 1 % SP i 0,5 % SP DOD pokazuju nešto izraženije razlike u gustoćama. Te se razlike mogu pripisati varijacijama u zbijenosti ili homogenosti mješavine, ali i potencijalnim problemima u ravnomjernom rasporedu superplastifikatora prilikom naknadnog dodavanja u već izmiješanu svježju mješavinu. Na primjer, mješavina s naknadno dodanim superplastifikatorom nakon 7 dana pokazuju pad gustoće u odnosu na referentnu mješavinu i mješavinu s 0,5 % SP.

4.4 Vlačna čvrstoća savijanjem očvrstlog morta

Ispitivanja vlačne čvrstoće savijanjem cementnog morta (Slika 8 i 9) provedena su prema normi HRN EN 196-1 [11] na uzorcima starima 2 i 7 dana. Vrijednosti čvrstoće predstavljaju srednju vrijednost jedne serije koja se sastoji od 3 ispitna uzorka prikazana na Slici 9.

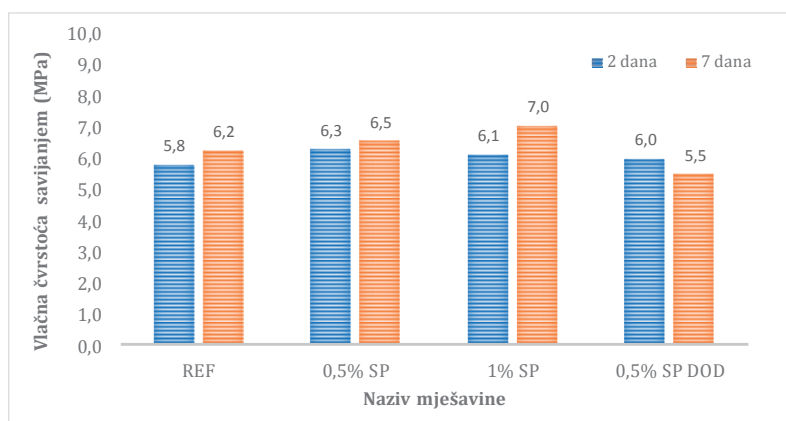
Na temelju rezultata ispitivanja uzoraka starih 2 dana može se zaključiti da sve mješavine s dodatkom superplastifikatora pokazuju višu vlačnu čvrstoću na savijanje u odnosu na referentnu mješavinu. Rezultati ispitivanja prikazani su u grafu na Slici 10. Mješavina s 0,5 % superplastifikatora pokazala je porast čvrstoće od 8,3 %, dok mješavina s 1 % superplastifikatora pokazuje nešto manji porast od 5,4 %. Smanjen učinak kod većeg udjela superplastifikatora može se pripisati gubitku homogenosti i kohezivnosti svježje mješavine, što je prikazano na Slici 6, desno. Mješavina s naknadno dodanim superplastifikatorom (0,5 % SP DOD) pokazuje nešto nižu čvrstoću u odnosu na onu u kojoj je isti udio superplastifikatora dodan zajedno s vodom u početnoj fazi miješanja, međutim i dalje za 3,2 % veću u odnosu na referentnu mješavinu (Tablica 2). Općenito, može se zaključiti da dodavanje superplastifikatora pozitivno utječe na rani razvoj vlačne čvrstoće savijanjem cementnog morta već nakon 2 dana očvršćivanja.



Slika 8. Ispitivanje vlačne čvrstoće savijanjem



Slika 9. Serija uzoraka nakon ispitivanja vlačne čvrstoće savijanjem



Slika 10. Utjecaj superplastifikatora na vlačnu čvrstoću savijanjem očvrsllog cementnog morta pri starosti od 2 i 7 dana

Rezultati ispitivanja vlačne čvrstoće na savijanje uzoraka starih 7 dana pokazuju da sve mješavine kod kojih je superplastifikator prethodno pomiješan s vodom ostvaruju veću čvrstoću na savijanje u odnosu na referentnu. Mješavina s 0,5 % SP bilježi porast od 4,6 %, dok mješavina s 1 % SP postiže najveću vlačnu čvrstoću savijanjem i to 12,6 % veću od referentne. Suprotno tome, mješavina s naknadno dodanim superplastifikatorom (0,5 % SP DOD) pokazuje najnižu čvrstoću, čak 12,3 % manju u odnosu na referentnu mješavinu (Tablica 3). Ova smanjena čvrstoća može se djelomično objasniti nižom gustoćom očvrsljih uzoraka (Slika 7). Općenito, superplastifikator doprinosi porastu vlačne čvrstoće

savijanjem, pri čemu se taj učinak dodatno pojačava s većim udjelom, pod uvjetom da se dodaje u početnoj fazi miješanja zajedno s vodom.

Zaključno, iz usporedbe čvrstoća uzoraka starih 2 i 7 dana (Slika 10) uočen je očekivani trend porasta čvrstoće kroz vrijeme za sve ispitane mješavine, uključujući i referentnu. Dodatno, potvrđeno je da povećanje udjela superplastifikatora pozitivno utječe na porast vlačne čvrstoće savijanjem cementnog morta. Najbolji rezultati postižu se kada se superplastifikator prethodno pomiješa s vodom u početnoj fazi miješanja. Nasuprot tome, naknadno dodavanje superplastifikatora u već izmiješanu svježju mješavinu dovodi do neujednačene raspodjele aditiva, smanjene homogenosti i povećane poroznosti. Takvi uvjeti često uzrokuju slabiju zbijenost i veću količinu zarobljenog zraka u mješavini, što u konačnici negativno utječe na mehanička svojstva očvrslog morta [14].

4.5 Tlačna čvrstoća očvrslog morta

Ispitivanje tlačne čvrstoće cementnog morta (Slika 11) provedeno je na polovicama prizmi koje su prethodno korištene za ispitivanje vlačne čvrstoće savijanjem (Slika 12). Prikazane vrijednosti tlačne čvrstoće (Slika 13) predstavljaju srednju vrijednost rezultata jedne serije uzoraka, računatu iz šest pojedinačnih mjerenja.

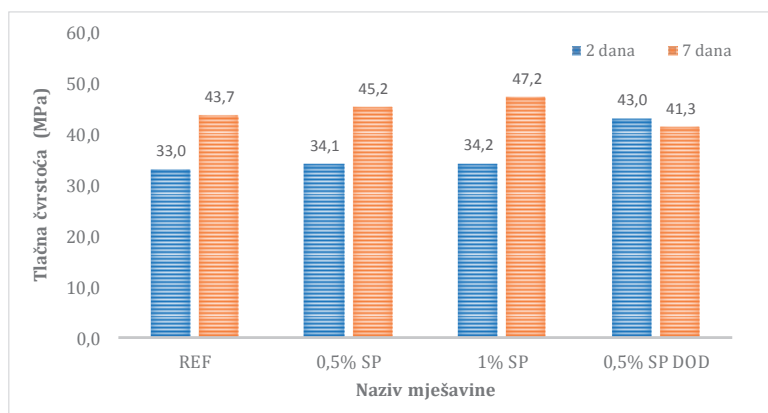
Na temelju rezultata ispitivanja nakon 2 dana starosti može se zaključiti da mješavina s dodatkom 0,5 % superplastifikatora pokazuje blago povećanje tlačne čvrstoće od 3,2 % u odnosu na referentnu, dok mješavina s 1 % superplastifikatora postiže nešto veći porast od 3,6 %. Ovi rezultati upućuju na to da veći udio superplastifikatora može doprinijeti boljoj zbijenosti svježje mješavine i povećanju rane čvrstoće. Neočekivano, mješavina s naknadno dodanim superplastifikatorom (0,5 % SP DOD) pokazala je znatno veći porast tlačne čvrstoće u odnosu na mješavinu gdje je superplastifikator doziran zajedno s vodom, čak 30,4 % u odnosu na referentnu mješavinu (Tablica 2). Iako ovaj rezultat sugerira pozitivan učinak superplastifikatora kada se dodaje naknadno u već izmiješanu mješavinu, moguće je da je on posljedica veće gustoće očvrslih uzoraka (Slika 7), a ne isključivo posljedica učinkovitosti naknadno dodanog superplastifikatora. Kako bi se potvrdila ili opovrgnula točnost ovih rezultata, potrebno je provesti dodatna ispitivanja na većem broju uzoraka.



Slika 11. Ispitivanje tlačne čvrstoće



Slika 12. Uzorci nakon ispitivanja tlačne čvrstoće



Slika 13. Utjecaj superplastifikatora na tlačnu čvrstoću očvrslog cementnog morta pri starosti od 2 i 7 dana

Nakon 7 dana starosti, sve mješavine s dodatkom superplastifikatora postižu veće tlačne čvrstoće u odnosu na referentnu. Mješavina s 0,5 % superplastifikatora ostvaruje povećanje od 3,5 %, dok mješavina s 1 % superplastifikatora pokazuje porast od 8,2 % (Tablica 3), što dodatno potvrđuje pozitivan utjecaj većih doza superplastifikatora na razvoj tlačne čvrstoće. Isti trend prikazan je i u istraživanju koje su proveli Salem i suradnici [14]. Ovi rezultati ukazuju i na poboljšanu obradivost i zbijenost morta pri višem udjelu aditiva, što je i vidljivo nas Slici 5. Nasuprot tome, mješavina s naknadno dodanim superplastifikatorom (0,5 % SP DOD) pokazuje manju tlačnu čvrstoću u odnosu na mješavinu kod koje je isti udio superplastifikatora dodan u vodu prije miješanja, što opet potvrđuje

da kasnije dodavanje aditiva nije jednako učinkovito kao njegovo dodavanje u vodu u početnoj fazi miješanja.

Zaključno, usporedba rezultata tlačne čvrstoće pri starosti od 2 i 7 dana pokazuje da sve mješavine s dodatkom superplastifikatora ostvaruju bolje rezultate od referentne mješavine, pri čemu se učinak povećava porastom udjela superplastifikatora i vremenom, što je u skladu s rezultatima danim u [14]. Općenito, primjena superplastifikatora doprinosi poboljšanju tlačne čvrstoće cementnog morta, osobito kod većih doza i ako se doziraju zajedno s vodom u ranoj fazi miješanja.

5. Zaključak

Glavni cilj istraživanja bio je ispitati utjecaj različitih udjela i načina vremena doziranja superplastifikatora na svojstva svježeg i očvrslog cementnog morta, s posebnim naglaskom na obradivost te tlačnu i vlačnu čvrstoću savijanjem, pri konstantnom vodocementnom omjeru.

Provedena eksperimentalna ispitivanja potvrdila su da superplastifikatori mogu značajno poboljšati svojstva cementnih mješavina u svježem i očvrsлом stanju, neovisno o starosti uzoraka, no njihova primjena mora biti pažljivo kontrolirana kako bi se postigli optimalni rezultati. Posebno je izražen pozitivan utjecaj na obradivost svježeg morta, omogućujući lakšu ugradnju bez povećanja vodocementnog faktora, čime se smanjuje rizik od segregacije, gubitka kohezivnosti i posljedičnog pada čvrstoće. Uočeno je da veći udio superplastifikatora doprinosi blagom povećanju gustoće uzoraka, što pozitivno utječe na trajnost očvrslog morta. Mješavine s dodatkom superplastifikatora ostvarile su veće tlačne i vlačne čvrstoće savijanjem u odnosu na referentne uzorke, pri čemu je zabilježen jasan trend rasta čvrstoće s povećanjem udjela superplastifikatora. Iako povećanje količine superplastifikatora općenito poboljšava svojstva morta, ključno je pažljivo odrediti optimalnu dozu kako bi se izbjegli neželjeni učinci poput segregacije, gubitka kohezivnosti i smanjenja čvrstoće. Nadalje, važno je napomenuti da naknadno dodavanje superplastifikatora u već izmiješanu svježju mješavinu može dovesti do smanjenog učinka u usporedbi s dodavanjem u vodu tijekom početnog miješanja.

Na temelju dobivenih rezultata može se zaključiti da pravilno odabrana količina superplastifikatora, kao i trenutak vremena doziranja, može imati utjecaj na njegovu učinkovitost i na svojstva cementnih kompozita u svježem i očvrsлом stanju te je stoga pravilno projektiranje mješavine i procesa miješanja od iznimne važnosti. Za potvrdu ovih zaključaka preporučuje se provedba dodatnih ispitivanja, pri čemu bi trebalo koristiti

standardni pijesak radi osiguranja veće usporedivosti i ponovljivosti rezultata.

Zahvala. *Zahvaljujemo tvrtkama Holcim Hrvatska d.o.o. i Mapei Hrvatska d.o.o. na donaciji materijala koji su omogućili provedbu eksperimentalnih ispitivanja.*

Literatura

- [1] Bjegović, D., Štirmer, N. (2015). Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- [2] Beslać, J. (1980). Superplastificirani beton. Građevinski institut Zagreb. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.
- [3] Tareque, T., Tousif, F., Billah, M.A., Jabir, A.A.M, Mirmotalebi, S. (2023). Comprehensive Analysis of the Effects of Superplasticizer Variation on the Workability and Strength of Ready-Mix Concrete. Open Journal of Civil Engineering, 13, 756-770.
- [4] Bediako, M. (2024). Superplasticized vs. Conventional Concrete: A Comparative Review. Materials Sciences and Applications, 15, 271-284
- [5] Alsadey, S. (2015). Effect of Superplasticizer on Fresh and Hardened Properties of Concrete. Journal of Agricultural Science and Engineering, 1 (2), 70-74.
- [6] Marinković, S., Protić, M., Paunović, S., Nešović, I., Bijeljić, J. (2018). Application of Industrial By-Products as Mineral Admixtures for Self-Compacting Concrete, Građevinar, 70 (1), 31-38.
- [7] Malešev, M., Radonjanin, V., Vukoslavčević, S., Supić, S., Laban, M. (2017). Influence of Fly Ash and Decreasing Water-Powder Ratio on Performance of Recycled Aggregate Concrete, Građevinar, 69 (9), 811-820.
- [8] Holcim (Hrvatska) d.o.o., Proizvodi i usluge, <https://www.holcim.hr/proizvodi-i-usluge/cement/certifikati-i-tehnicke-upute>, pristup 20.06.2025.
- [9] HRN EN 197-1:2012. Cement – 1. dio: Sastav, specifikacije i kriteriji sukladnosti cementa opće namjene (EN 197-1:2011), Hrvatski zavod za norme, 2012.
- [10] Mapei, Dynamon SF 16, <http://www.mapei.com/>, pristup 20.06.2025.
- [11] HRN EN 196-1:2016. Metode ispitivanja cementa – 1. dio: Određivanje čvrstoće, Hrvatski zavod za norme, 2016.
- [12] HRN EN 1015-6:2000. Metode ispitivanja mortova za zide – 6. dio: Određivanje gustoće svježeg morta, Hrvatski zavod za norme, 2000.
- [13] HRN EN 1015-3:2000. Metode ispitivanja mortova za zide – 3. dio: Određivanje konzistencije svježeg morta (stolićem za potresanje), Hrvatski zavod za norme, 2000.

TEORETSKO-MATEMATIČKA OSNOVA PRIMJENE RAČUNALNE DINAMIKE FLUIDA U MODELIRANJU PROCESA OBRADE OTPADNIH VODA

THEORETICAL AND MATHEMATICAL BASIS OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS APPLICATION IN MODELING WASTEWATER TREATMENT PROCESSES

Elvis Žic*, Lucija Žagrić*, Dino Pršić*

Sažetak

Rad istražuje primjenu Računalne dinamike fluida (RDF, eng. Computational Fluid Dynamics, CFD) u analizi fizikalnih, kemijskih i bioloških procesa pročišćavanja otpadnih voda. RDF je suvremena metoda numeričkog modeliranja koja u obradi otpadnih voda omogućuje detaljnu simulaciju i vizualizaciju protoka fluida, miješanja i kemijskih reakcija unutar jedinica za obradu, što pomaže u optimizaciji dizajna i operativnih parametara. RDF može identificirati neučinkovitosti, poput mrtvih zona ili kratkog spoja u spremnicima, te podržati poboljšanja u aeraciji, sedimentaciji i doziranju kemikalija. Smanjenjem potrebe za fizičkim prototipovima i prilagodbama metodom pokušaja i pogrešaka, CFD doprinosi uštedi troškova, poboljšanim performansama obrade i održivijem razvoju sustava. Cilj rada je ukazati na primjenu RDF-a u projektiranju, optimizaciji i analizi postrojenja za pročišćavanje te potaknuti njegovu širu primjenu u struci i obrazovanju.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida (RDF), pročišćavanje otpadnih voda, fizikalni procesi, kemijski procesi, biološki procesi, numeričko modeliranje

Abstract

The article examines the application of Computational Fluid Dynamics (CFD) in the analysis of physical, chemical and biological processes in wastewater treatment. The use of CFD in wastewater treatment enables detailed simulation and visualization of

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: {elvis.zic@uniri.hr; lzagric@uniri.hr; dprsic@student.uniri.hr}

fluid flow, mixing, and chemical reactions within treatment units, which helps optimize design and operational parameters. CFD can identify inefficiencies, such as dead zones or short-circuiting in tanks, and support improvements in aeration, sedimentation and chemical dosing. By reducing the need for physical prototyping and trial-and-error adjustments, CFD contributes to cost savings, enhanced treatment performance, and more sustainable system development. The aim of the paper is to highlight the application of CFD in the design, optimisation and analysis of wastewater treatment plants and to encourage wider application in professional and educational settings.

Key words: *Computational Fluid Dynamics (CFD), wastewater treatment, physical processes, chemical processes, biological processes, numerical modeling*

1. Uvod

Upotreba Računalne dinamike fluida (RDF) u pročišćavanju otpadnih voda donosi niz prednosti, uključujući mogućnost detaljne analize tokova, optimizaciju hidrauličkih uvjeta i identifikaciju neučinkovitih zona unutar uređaja za obradu [1,2]. RDF omogućuje virtualno testiranje različitih scenarija bez potrebe za fizičkim prototipima, čime se smanjuju troškovi i vrijeme razvoja. Osim toga, RDF doprinosi boljem razumijevanju kompleksnih interakcija između fizikalnih, kemijskih i bioloških procesa, što je ključno za učinkovito projektiranje i upravljanje sustavima za obradu otpadnih voda te značajno doprinosi očuvanju ekologije [1,3,4].

RDF predstavlja numeričku metodu koja se koristi za simulaciju toka fluida pomoću rješavanja Navier–Stokesovih jednažbi [5,6], omogućuje detaljnu analizu strujanja, prijenosa tvari i energije te interakcije fluida s čvrstim tijelima. U kontekstu obrade otpadnih voda, RDF se primjenjuje za optimizaciju dizajna uređaja, analizu učinkovitosti procesa i identifikaciju potencijalnih problema u radu sustava [7-9].

Osim RDF-a, u analizi i modeliranju procesa pročišćavanja otpadnih voda koriste se i druge metode, poput empirijskih modela temeljenih na eksperimentalnim podacima, mehanističkih modela koji opisuju pojedinačne procese (npr. ASM modeli za biološku obradu), te statističkih i strojno-učećih metoda za predikciju ponašanja sustava na temelju povijesnih podataka [6,9,10]. Uz primjer sedimentacijskog spremnika, gdje se RDF koristi za analizu taloženja čestica, vrijedi spomenuti i aeracijske bazene u biološkoj obradi, gdje se RDF koristi za simulaciju miješanja, raspodjele otopljenog kisika i dinamike mikroorganizama [11]. Također, RDF se primjenjuje u denitrifikacijskim spremnicima, reaktorima s aktivnim muljem te UV dezinfekcijskim komorama [12].

Proces obrade otpadnih voda obuhvaća niz međusobno povezanih fizikalnih (sedimentacija, filtracija, flotacija, miješanje, prijenos topline), kemijskih (neutralizacija, oksidacija, precipitacija, adsorpcija) i bioloških procesa (razgradnja organskih tvari, nitrifikacija, denitrifikacija, uklanjanje fosfora), [3,5,8]. Ovi procesi raspoređeni su kroz različite stupnjeve obrade, počevši s primarnom obradom koja uključuje uklanjanje krutih tvari sedimentacijom, zatim sekundarnom obradom koja se temelji na biološkoj razgradnji otpadnih tvari, te završno tercijarnom obradom koja primjenjuje napredne metode za uklanjanje nutrijenata i mikroonečišćivača [11,12].

Računalna dinamika fluida primjenjuje se u svim fazama gdje je potrebno razumjeti i optimizirati tokove fluida, miješanje i prijenos tvari. Trenutna dostignuća uključuju integraciju RDF-a s biokemijskim modelima, razvoj 3D simulacija kompleksnih uređaja te primjenu u realnom vremenu za potrebe upravljanja postrojenjima [10]. U nastavku rada opisani su načini implementacije navedenih procesa u okviru RDF-a, s posebnim naglaskom na praktične primjere i mogućnosti optimizacije sustava.

2. Temeljni fizikalni procesi transporta

Transport se definira kao kretanje tvari fizikalnim procesima kao što su advekcija (ili konvekcija) i difuzija. Fizikalni transport, u sprezi s kemijskim i biološkim procesima, mijenja koncentraciju tvari u vodi. Stoga, da bi se utvrdilo je li pročišćena voda u skladu sa standardom kvalitete, važno je da modelar RDF-a razumije temeljne fizikalne procese transporta [11]. Potrebno je znati kako se ti fizikalni procesi matematički opisuju i rješavaju u računalnim modelima. Za parametar kvalitete vode ϕ , na primjer, temperaturu ili koncentraciju, generička transportna jednadžba ima oblik:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \phi}_{\text{vremenska izvedenica}} + \underbrace{\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})}_{\text{konvekcija}} - \underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\text{difuzija}} = \underbrace{S_\phi}_{\text{izvor/ponor}} \quad (1)$$

pri čemu je $\mathbf{u}$ brzina prijenosne tekućine, γ koeficijent difuzije, S_ϕ pojam izvora ili ponora, koji modelira proizvodnju ili potrošnju ϕ uzrokovanu fizikalnim, kemijskim ili biološkim procesima.

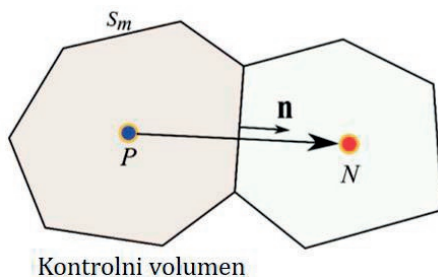
Generička količina ϕ često predstavlja koncentraciju. Ova generička transportna jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba koja se sastoji od diferencijalnih operatora. Uobičajeni diferencijalni operatori uključuju vremensku derivaciju, gradijent, divergenciju, Laplaceov operator, kao i razne članove izvora i ponora [12,13]. Funkcionalni oblik

izraza izvora ili ponora može biti jednostavan ili složen, ovisno o tome je li funkcija ϕ sama za sebe i ako jest, je li linearna ili nelinearna funkcija.

Temeljna jednadžba (1) matematički je iskaz zakona očuvanja količine gibanja za ϕ . Njegovo razumijevanje može se olakšati korištenjem kontrolnog volumena uz razmatranje promjena ϕ unutar ovog volumena i preko njegove granice (Slika 1). Čelija P označava kontrolni volumen koji se razmatra, a čelija N je njegov susjed. Kontrolni volumen P ima volumen V , a njegova površina je označena kao S_m . Oznaka $\mathbf{n}$ predstavlja jedinični normalni vektor zajedničke površine između P i N . Budući da je ϕ koncentracija, a ukupna količina unutar kontrolnog volumena $\int \phi dV$, vremenska derivacija predstavlja vremensku stopu promjene ϕ unutar navedenog kontrolnog volumena:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV \quad (2)$$

koji može biti izazvan advekcijom i difuzijom preko granice, kao i unutarnjom proizvodnjom i potrošnjom [4].



Slika 1. Zakon očuvanja za kontrolni volumen

Advekcija je prijenos topline ili tvari tekućinom koja teče. Drugim riječima, to je advektivni transport nošene brzine tekućine. Pod pretpostavkom da je brzina $\mathbf{u}$ na granici kontrolnog volumena, tada se tok advektiran preko granice može procijeniti kao sljedeći površinski integral:

$$\oint_{S_m} \phi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS \quad (3)$$

koji se dalje može napisati kao volumenski integral nakon pozivanja na Gaussov teorem:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) dV \quad (4)$$

Ovaj izraz opisuje transport i ima informacije o smjeru, definirane vektorima brzine toka. Još jedan često korišten izraz, konvekcija, odnosi se na gibanje izazvano prijenosom topline i uzgonom. U literaturi su mnogi znanstvenici koristili advekciju i konvekciju naizmjenično [5,8].

Pojam difuzije predstavlja gradijentni transport, što znači da se ϕ prenosi iz područja visoke koncentracije u područja niske koncentracije sve dok se ne postigne jednolika koncentracija. Kako se gradijent $\nabla\phi$ pokazuje uz koncentracijski nagib, a difuzijski transport je u suprotnom smjeru, tok preko granice kontrolnog volumena može se napisati kao:

$$q_s = -\gamma\nabla\phi \quad (5)$$

gdje je γ difuzivnost. Difuzija može biti uzrokovana raspršivanjem čestica tvari zbog slučajnih molekularnih gibanja (molekularna difuzija) ili zbog turbulentnih vrtloga (turbulentna difuzija) [13]. Izvođenjem površinskog integrala s ovim difuzijskim tokom, doprinos difuzije se može zapisati kao:

$$-\int_V \nabla \cdot (\gamma\nabla\phi) dV \quad (6)$$

Izvor ili ponor, odnosno proizvodnja i potrošnja ϕ unutar kontrolnog volumena može se opisati volumetrijskim intenzitetom S_ϕ . Stoga je doprinos izvora ili ponora unutar kontrolnog volumena opisan kao:

$$\int_V S_\phi dV \quad (7)$$

Sastavljajući sve članove zajedno, zakon očuvanja ϕ unutar kontrolnog volumena može se pisati kako slijedi:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\gamma\nabla\phi) \right] dV = \int_V S_\phi dV \quad (8)$$

Ukoliko je kontrolni volumen beskonačno malen, integral u jednadžbi (8) trebao bi biti jednak nuli. Stoga se može izvesti predhodno navedena generička transportna jednadžba (1).

Temperatura je važan parametar za pročišćavanje otpadnih voda. Na mnoge kemijske i biološke procese u postrojenju za pročišćavanje utječu temperaturne varijacije [14,15]. Neravnomjerna raspodjela temperature uzrokuje neujednačenu gustoću tekućine u jedinici za tretman. Toplinski inducirani učinci uzgona utječu na hidrodinamiku unutar ovih jedinica. Mogu se pojaviti gravitacijske struje tako da se putanja toka promijeni u odnosu na proračun. Toplina povezana s otpadnim vodama koje se ispuštaju u površinske vode može stvoriti toplinske učinke na vodena staništa [16]. Stoga je prekomjerno toplinsko ispuštanje u rijeke i potoke iz uređaja za pročišćavanje otpadnih voda važan okolišni „stres” koji treba pratiti [17].

Temeljna jednadžba za toplinsku energiju, obično u smislu temperature, slična je generičkoj transportnoj jednadžbi (1). Kada je u suštini vidljiva samo konvekcija, na primjer, prijenos topline u tijelu mirne vode bez gravitacijskih učinaka ili krutom tijelu bez zračenja, problem se

može jednostavno simulirati jednadžbom difuzije. Prema Fourierovom zakonu kondukcije, tok toplinske energije $\mathbf{q}_T$ proporcionalan je temperaturnom gradijentu, tj. vrijedi:

$$\mathbf{q}_T = -k\nabla T \quad (9)$$

gdje je k toplinska vodljivost, a T temperatura. Radi jednostavnosti, k se pretpostavlja kao da je izotropna i konstantna toplinska vodljivost. Zakon očuvanja toplinske energije daje sljedeću jednadžbu vodljivosti:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (10)$$

gdje je ρ gustoća stupca tekućine, a C_p specifična toplota. Za nestlačivi fluid, toplinska energija je produkt $C_p T$. U stabilnom stanju, jednadžba (10) može se dalje pojednostaviti kao:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (11)$$

što predstavlja Laplaceova jednadžba uzeta za T . Ako se tekućina kreće, tada vladajuća jednadžba postaje složenija dodavanjem člana konvekcije [15]. U ovom slučaju, jednadžba nestacionarne konvekcije i vodljivosti ima sličan oblik kao jednadžba nestacionarne advekcije i difuzije te poprima oblik:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + S_T \quad (12)$$

gdje je $\mathbf{u}$ brzina fluida, a S_T izvor ili ponor topline. Treba imati na umu da je termin advekcije ovdje napisan drugačije nego u jednadžbi (1). Za viskoznu tekućinu, viskozni učinak nepovratno rasipa kinetičku energiju u toplinu. Doprinos izvora izazvan stvaranjem viskozne topline može se ocijeniti kao:

$$S_T = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (13)$$

Iz jednadžbe (13) može se vidjeti da je S_T član disipacije viskozne energije uvijek pozitivan. U stvarnosti, ovaj izraz ima zanemarivu veličinu u usporedbi s drugim članovima u jednadžbi prijenosa topline. Može biti značajan kada je brzina smicanja tekućine izuzetno visoka. Za većinu procesa obrade otpadnih voda, brzina smicanja je niska, pa se ovaj pojam može zanemariti.

3. Ostali fizikalni procesi povezani s tretmanom

3.1 Odvajanje čestica

Jedna od glavnih nečistoća u otpadnoj vodi su čestice suspendirane u dotoku. Te se čestice razlikuju po veličini, obliku, gustoći i biokemijskom sastavu. Glavni kriterij procesa obrade je učinkovito uklanjanje ovih čestica nečistoća uglavnom uz niz fizičkih procesa kao što su rešetanje, uklanjanje pijeska, sedimentacija (taloženje), flotacija i filtracija [7]. Ovi procesi fizičkog odvajanja mogu biti potpomognuti kemijskim i biološkim mjerama, kao što su koagulacija i flokulacija.

Rešetanje je fizičko uklanjanje čestica i otpada pomoću šipki i mreža. Voda se propušta kroz otvore između šipki ili mrežica, dok se krutine veće od otvora zadržavaju iza sita. Svrha mu je zaštita nizvodnih jedinica i opreme od začepjenja i abrazije. Kod proračuna dovoda vode treba uvažiti zaštitu ribe od uvlačenja ili udaranja u sito [18]. Rešetke je potrebno povremeno čistiti radi nesmetanog protoka i smanjenja gubitka visine. Sa stajališta RDF-a, modeliranje prosijavanja ovisi o vrsti sita i potrebi uvažavanja akumuliranih krutina. Za zaštitu šipki potrebno je dodatno modelirati njihove geometrijske detalje i otvore, dok to kod mrežaste zaštite nije praktično. S nakupljanjem otpada raste i otpor. Većina komercijalnih RDF kodova omogućuje uključivanje propusnih zona i različitih modela poroznih medija [8,10].

U sustavima za uklanjanje pijeska, guste čestice poput pijeska uklanjaju se gravitacijskim taloženjem ili drugim mehaničkim odvajanjem. Lakše čestice, poput organskih biokrutina, manje je vjerojatno da će se ukloniti. Uklanjanje pijeska obično slijedi nakon prosijavanja i prethodi primarnoj sedimentaciji. Postoji više tipova sustava temeljenih na različitim mehanizmima odvajanja: komore i kanali za pijesak, vrtložni sustavi i hidrocikloni. Za modeliranje procesa RDF-om važno je da kod može obuhvatiti mehanizam uklanjanja [18,19]. Primjerice, u vrtložnom sustavu treba uzeti u obzir centrifugalnu silu na čestice. Kako je teško pratiti svaku česticu, postoje dvije opcije: modelirati koncentraciju (Eulerov pristup) ili putanje reprezentativnih čestica, iz kojih se zaključuje o transportu i zadržavanju čestica.

Sedimentacija se odnosi na uklanjanje čestica težih od vode gravitacijskim taloženjem u spremniku ili bazenu. Dok tok prolazi jedinicom, voda nosi čestice, a gravitacija ih usmjerava prema dnu. Teške čestice brže se talože i tvore sloj mulja koji treba ukloniti, dok se lakše često ne stignu spustiti. Stoga pri projektiranju (dimenzioniranju) taložnika treba uvažiti raspodjelu veličine čestica. Tok je obično turbulentan, a mješavina vode i čestica, posebno u sloju mulja, pokazuje

nenewtonsko ponašanje. Povećana koncentracija utječe na taloženje jer bliske čestice ometaju slijeganje. Sve se to mora uvažiti u RDF modelima za procjenu učinka slijeganja. Kao i kod uklanjanja pijeska, modeliranje sedimentacije može koristiti Eulerov ili Lagrangeov pristup.

Flotacija koristi male plinske mjehuriće za hvatanje krutina i njihovo isplivavanje. Može djelomično ukloniti fine čestice koje ne padaju taloženjem. Zahtijeva manje prostora od taloženja i daje koncentriraniji mulj. Potreban je stalni dotok komprimiranog zraka. Flotacija se primjenjuje za uklanjanje ulja, masti, proteina i mesnih otpadaka. U RDF modelima treba obuhvatiti višefazni tok zbog zraka te zarobljavanje krutina u mjehurićima [2,4,20].

U procesu filtracije, niske koncentracije suspendiranih čestica uklanjaju se prolaskom vode kroz porozni medij, najčešće pijesak. Tijekom protoka kroz pore, čestice se zadržavaju izravnim presretanjem, difuzijom (Brownovo gibanje), inercijskim taloženjem, sedimentacijom i hidrodinamičkim sudarom. Nakupljanje čestica može začepiti pore i smanjiti učinkovitost, pa je potrebno povratno ispiranje. Filtracija može raditi gravitacijski ili pod tlakom. Gravitacijska je sporija zbog ograničene visine pritiska, dok je tlačna brža i zahtijeva manje prostora. U RDF modelima filter se opisuje kao zona s dodatnim otporom toku [10,12,18]. Crittenden i sur. [10] u svom radu istražuju filtraciju kao ključnu fazu obrade vode, analiziraju učinkovitost filtracijskih jedinica te ističu važnost održavanja propusnosti filtera i razlike između gravitacijskih i tlačnih sustava. U radu Grady i sur. [12] proučava se biološka obrada otpadnih voda, naglašavajući kako filtracija dopunjuje biološke procese, osobito u fazi naknadne obrade radi postizanja visoke kvalitete izlazne vode. Le Moullec i sur. [18] provode CFD simulacije za analizu hidrodinamike i ponašanja čestica u reaktorima, čime pridonose boljem razumijevanju učinkovitosti filtracijskih sustava i hidrauličkog otpora.

4. Kemijski procesi

Kemikalije se koriste uz procese fizikalne obrade kako bi se postigli različiti standardi kvalitete vode tijekom obrade otpadnih voda. Modeliranje unutar RDF-a dragocjeno je za predviđanje koncentracije kemikalija na ispustima ili unutar jedinica za obradu. Općenito, kemijske reakcije u pročišćavanju otpadnih voda mogu se kategorizirati u pet skupina: kemijsko taloženje, kemijska koagulacija, kemijska oksidacija, ionska izmjena i kemijska stabilizacija [3,5].

Kemijsko taloženje najčešća je metoda uklanjanja otopljenih metala iz otpadne vode koja sadrži toksične metale. Da bi se otopljeni metali

pretvorili u krute čestice, smjesi se dodaje reagens za taloženje. Kemijska reakcija potaknuta reagensom uzrokuje njihovo stvaranje, a čestice se zatim uklanjaju filtracijom. Učinkovitost procesa ovisi o vrsti i koncentraciji metala te vrsti reagensa.

Kemijska koagulacija uključuje destabilizaciju čestica kako bi se one agregirale tijekom flokulacije. Fine krute čestice u vodi nose negativne površinske naboje, što ih sprječava da formiraju veće skupine i talože se. Koagulansi s pozitivnim nabojem smanjuju taj naboj, nakon čega čestice slobodno tvore veće skupine. U smjesu se zatim dodaje anionski flokulant koji neutralizira skupine ili stvara mostove između njih, povezujući ih u veće aggregate. Kada se formiraju, čestice se uklanjaju sedimentacijom.

Kemijska oksidacija uvodi oksidirajuće sredstvo (npr. klor ili ozon) koje prenosi elektrone ciljnim kemikalijama u vodi. One zatim prolaze strukturnu modifikaciju i postaju manje destruktivne. Alkalno kloriranje koristi klor protiv cijanida, no može stvoriti toksične klorirane spojeve, pa su potrebni dodatni koraci. Napredna oksidacija uklanja organske spojeve nastale kao nusprodukti kemijske oksidacije kroz procese, poput parnog ili zračnog uklanjanja te adsorpcije aktivnim ugljenom.

Ionska izmjena je tehnologija koja se koristi za uklanjanje tvrdoće i raznih kontaminanata iz vode, poput nitrata, perklorata, arsena, bromida, otopljenog organskog ugljika, kobalta i urana [14]. U postupku omekšavanja se pozitivno nabijeni natrijevi ioni uvode u obliku soli natrijeva klorida ili slane vode. Ioni kalcija i magnezija zamjenjuju mjesta s natrijevima, dok se slobodni natrijevi ioni otpuštaju u vodu. Nakon obrade velike količine vode, otopina se zasiti kalcijem i magnezijem, pa je treba obnoviti natrijevim ionima.

Kemijska stabilizacija djeluje slično oksidaciji. Mulj se tretira oksidansom, poput klora. Time se usporava biološki rast i smanjuje neugodan miris, a voda se uklanja iz mulja [21].

4.1 Transport kemijskih tvari

Prijenos kemijskih tvari u vodi može se matematički prikazati općom jednadžbom advekcije-difuzije-reakcije kako slijedi:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \right) = S_i \quad (14)$$

gdje je u_i brzina toka (LT^{-1}), C_i koncentracija tvari (ML^{-3}), D_i efektivna difuznost (kombinacija molekularne i turbulentne difuzije) za kemijske tvari (L^2T^{-1}) te S_i pojam vanjskog volumetrijskog izvora ($ML^{-3}T^{-1}$) uključujući proizvodnju, potrošnju i prijenos u drugu fazu. Vanjski

volumetrijski izvorni član, S_i , na desnoj strani jednadžbe (14), predstavlja brzinu kemijske promjene uzrokovanu kemijskim reakcijama. Izvorni termini koji se često koriste za dezinfekciju ozonom navedeni su u Tablici 1. U ovoj tablici k_d predstavlja konstantu raspadanja ozona, C_l je koncentracija otopljenog ozona, k_{NOM} konstanta brzine reakcije za reakciju između otopljenog ozona i koncentraciju prirodne organske tvari (*eng. NOM*), dok je k_B konstanta brzine stvaranja bromata. Treba napomenuti da su k_d i k_B konstante brzine reakcije prvog reda (T^{-1}), dok je k_{NOM} konstanta brzine reakcije drugog reda ($M^{-1}L^3T^{-1}$).

Tablica 1. Često korišteni izvorni pojmovi u transportu kemijskih tvari i jednadžbe za dezinfekciju ozonom

Kemijska tvar	Izvorni pojmovi u transportnim jednadžbama	Literatura
Otopljeni ozon, C_l	$S_{C_l} = -k_d C_l$	Huang i sur. (2004.) [20]; Li i sur. (2021.) [22]
Koncentracija NOM-a	$S_{[NOM]} = -k_{NOM} [NOM] C_l$	Dooil i sur. (2009.) [23]; Cai i sur. (2024.) [24]
Bromat, C_B	$S_{C_B} = k_B C_l$	Tang i sur. (2005.) [25]
CT (vrijeme koncentracije)	$S_{CT} = C_l$	Zhang (2006.) [26]; Zhang i sur. (2014.) [27]

Huang i sur. (2004.) primijenili su RDF modeliranje za analizu hidrodinamike i prijenosa ozona u kontaktoru, čime su procijenili učinkovitost procesa dezinfekcije, dok su Li i sur. (2021.) razvili numerički model koji spaja prijenos mase i reakcijske procese s ciljem optimizacije dizajna sustava ozonske oksidacije otpadnih voda i primjene jednadžbi za opis dezinfekcije. Dooil i sur. (2009.) optimizirali su dizajn ozonskog kontaktora pomoću specijaliziranog softvera, fokusirajući se na prijenos ozona i učinkovitost dezinfekcije kroz matematičko modeliranje. Cai i sur. (2024.) u svom radu daju pregled mehanizama prijenosa i reakcija ozona u vodi, razmatrajući jednadžbe dezinfekcije te izazove primjene u uklanjanju patogena. U radu Tang i sur. (2005.) modelirana je inaktivacija oocista *Cryptosporidium parvum* i nastanak bromata u punom mjerilu ozonskog kontaktora, povezujući prijenos ozona i reakcijske jednadžbe dezinfekcije s rizikom formiranja nusprodukta. Zhang (2006.) te Zhang i sur. (2014.) istražuju u svojim radovima prijenos ozona i hidrodinamiku kontaktora pomoću RDF-a, fokusirajući se na povezanost vremena zadržavanja,

koncentracije i jednadžbi dezinfekcije za procjenu učinkovitosti obrade vode.

5. Biološki procesi

Osim fizikalnih i kemijskih procesa pročišćavanja otpadnih voda, uključeni su i biološki procesi. Tehnologija biološke obrade, samim time i biološki procesi (npr. inaktivacija), uobičajeni su kod dezinfekcije vode. Obično se koriste tehnologije biološkog pročišćavanja, kao što su sustavi s aktivnim muljem i kanali za alge [14-17]. Uobičajeno načelo tehnologija biološke obrade otpadnih voda je korištenje mikroorganizama kao što su bakterije (aerobno ili anaerobno), alge i gljivice (aerobno) za konzumiranje ili razgradnju organskih tvari u otpadnoj vodi i posljedično čišćenje otpadne vode. Mnogi biološki procesi uključeni u pročišćavanje otpadnih voda dobro su opisani u knjigama autora Grady i sur. (2011.) [12], te Crittenden i sur., 2012. [10]. Inaktivacija, proces aktivnog mulja i biološki proces rasta mikroalgi tri su primjera bioloških procesa.

Sredstva za dezinfekciju koja se obično koriste u obradi vode i otpada su slobodni klor, kombinirani klor (klor u kombinaciji s amonijakom, također poznati kao kloramini), klor dioksid, ozon i UV zrake. Prva četiri su kemijski oksidansi, dok UV zrake uključuju korištenje elektromagnetskog zračenja. Inaktivacija ovisi o svojstvima pojedinog mikroorganizma, dezinfekcijskog sredstva i vode. Osim toga, uočene brzine reakcija mogu varirati za čak šest redova veličine od jednog organizma do drugog, čak i za jedan dezinficijent, a brzine reakcija dobro poznatih reakcija dezinfekcije (npr. UV zrake) variraju za jedan i pola reda veličine. Unatoč tome, Chick-Watsonov model dezinfekcije [5], jednostavan i široko korišten kinetički model pokazao se korisnim u mnogim primjenama, a može se pisati na sljedeći način:

$$\ln \frac{N}{N_0} = -k_c C^n t \quad (15)$$

pri čemu su N broj mikroorganizama (L^{-3}), N_0 početni broj mikroorganizama (L^{-3}), k_c konstanta brzine inaktivacije (jedinice ovise o n), C koncentracija dezinficijensa (ML^{-3}), dok je t vrijeme kontakta (T). EkspONENT n varira ovisno o dezinficijensu i vrsti mikroorganizama i obično se pretpostavlja s vrijednosti 1. Konstanta brzine dezinficijensa također ovisi o dezinficijensu i vrsti mikroorganizama te je osjetljiva na okolišne uvjete u vodi. Opće načelo izvedeno iz Chick-Watsonovog modela je da kako se produkt koncentracije dezinficijensa i vremena kontakta povećava (*eng. CT*), inaktivacija mikroorganizama se pojačava. Praktično, vrijednost CT se može koristiti kao pokazatelj učinkovitosti dezinfekcije.

Stoga se kod modeliranja inaktivacije, umjesto rješavanja transportne jednadžbe za mikroorganizme [3], može pisati sljedeća formulacija:

$$\frac{\partial N_m}{\partial t} + u_j \frac{\partial N_m}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_i \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \right) = S_{N_m} \quad (16)$$

pri čemu su N_m koncentracija mikroorganizma m (L^{-3}), dok je S_{N_m} vanjski volumetrijski izvor za mikroorganizam m ($L^{-3}T^{-1}$). Pogodnije je riješiti transportnu jednadžbu za CT prema Zhang i sur. (2014.), koja je slična jednadžbama (15) i (16) i može se napisati kao [13]:

$$\frac{\partial (CT)}{\partial t} + u_j \frac{\partial (CT)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial (CT)}{\partial x_j} \right) = S_{CT} \quad (17)$$

Izvorni pojam gornje formule je definiran kao:

$$S_{CT} = C_{O_3} \quad (18)$$

gdje je C_{O_3} koncentracija otopljenog ozona (ML^{-3}). Treba imati na umu da se jednadžbe (16) i (17) mogu integrirati u RDF modele.

5.1 Proces aktivnog mulja

U postrojenju za pročišćavanje otpadnih voda ili industrijskih otpadnih voda, proces aktivnog mulja je biološki proces koji se može koristiti za oksidaciju biološke tvari koja sadrži ugljik, oksidaciju dušične tvari, uglavnom amonijaka i dušika u biološkoj tvari te uklanjanje hranjivih tvari (dušik i fosfor), [18,19]. Glavni tok modeliranja procesa s aktivnim muljem slijedi niz modela s aktivnim muljem (*eng. ASM*), koje su objavili Henze i sur. (2000.) opisano u radu [19]. Postoje tri tipa ASM modela koji se nazivaju ASM1, ASM2 i ASM3. Prema pregledu Meistera i sur. (2017.) [2], iako modeli ASM1 [19] i ASM3 [28] oba uzimaju u obzir biološke procese oksidacije ugljika, nitrifikacije i denitrifikacije, koncepti se razlikuju u opisu heterotrofnog rasta i propadanja. Za koncept raspadanja, ASM1 koristi model odumiranja-regeneracije, dok ASM3 razmatra endogeno disanje. Za koncept rasta, heterotrofne bakterije označene s XBH izravno konzumiraju lako dostupan biorazgradivi supstrat SS u ASM1, dok je rast odgođen uzimajući u obzir skladištenje unutarnjih staničnih spojeva u ASM3. ASM2 [19] se ističe uključivanjem procesa biološkog uklanjanja fosfora u formulaciju modela. Kombinirana značajka ovih ASM modela daje opis biološkog tretmana nizom biokinetičkih procesa, koji su izraženi kao sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. Najčešće korišteni ASM model u RDF-u je ASM1, koji se sastoji od 13 spojeva i 8 biokinetičkih procesa [19,28]. U radu Corominas i sur. [19] dokazano je da se modeli aktivnog mulja mogu učinkovito koristiti za provjeru i unaprjeđenje smjernica pri projektiranju uređaja za obradu otpadnih voda. Savun-Hekimoğlu [28] je u

svom radu pokazao da su ASM1 i ASM3 modeli temeljni alati za opis dinamike bioloških procesa, pri čemu se ASM1 posebno ističe zbog široke primjene u RDF-u. Zajedno potvrđuju važnost matematičkog modeliranja u optimizaciji i pouzdanosti sustava obrade otpadnih voda.

5.2 Biološki proces rasta mikroalgi

Biološki proces rasta mikroalgi nova je tehnologija za pročišćavanje otpadnih voda i dobivanje bioenergije kroz uzgoj mikroalgi korištenjem hranjivih tvari iz otpadnih voda. Na proces rasta mikroalgi ne utječu samo uvjeti okoliša kao što su temperatura, zračenje i koncentracije hranjivih tvari, već i fizički procesi, kao što je protok tekućine i sedimentacija čestica.

Prema preglednom radu Parka i Lija (2015.) [29], biološki proces rasta mikroalgi i utjecaj različitih parametara temeljito su proučavani i modelirani u proteklom desetljećima. Monodov model i model stanične kvote uspostavljeni su kao temeljne metode za opisivanje ograničenja hranjivim tvarima u reproduktivnim stopama fitoplanktona, a dalje su evoluirali u složenije oblike [30]. Iako se navodi da model stanične kvote točnije prikazuje rast ograničen hranjivim tvarima nego Monodov model, poteškoće u mjerenju neovisnih varijabli u prvom potaknule su razvoj modela koji koristi Monodovu jednadžbu [32]. Učinci zračenja i njegove promjene dinamike ovisne o koncentraciji stanica i dubini suspenzije također su modelirani i doveli su do proučavanja modela koji uključuju učinke hranjivih tvari i svjetla [15,16].

Kako bi se biokinetički proces integrirao u RDF model, biomasa, koncentracija ugljičnog dioksida i koncentracija dušika mogu se modelirati korištenjem transportne jednadžbe slične jednadžbi (16) s izvornim izrazom. Izvorni pojam algi može se izraziti prema [31]:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{F}{V}(X_0 - X) + \mu X - DX \quad (19)$$

gdje su F volumetrijski protok (L^3T^{-1}), V volumen elementa (L^3), X_0 utjecajna masena koncentracija algi (ML^{-3}), X masena koncentracija algi u efluentu (ML^{-3}), μ specifična stopa rasta algi (T^{-1}), te D koeficijent odumiranja (T^{-1}). Specifična stopa rasta može se izraziti kao kombinirani proizvod učinaka koncentracije ugljičnog dioksida (C), koncentracije dušika (N), zračenja (I) i temperature (T). Učinci CO_2 , dušika i zračenja mogu se izraziti u obliku funkcija tipa Monod [14]. Primjer modela za specifičnu stopu rasta μ može se izraziti preko sljedećeg izraza:

$$\mu = \mu_{max} \left(\frac{C}{K_C + C} \right) \left(\frac{N}{K_N + N} \right) \left(\frac{I}{K_I + I} \right) g(T) \quad (20)$$

gdje su $\mu_{\max}$ maksimalna specifična stopa rasta (T^{-1}), C koncentracija otopljenog efluenta CO_2 (ML^{-3}), N koncentracija anorganskog dušika (ML^{-3}), I zračenje na određenoj dubini bazena ($L^2T^{-1}N$), K_C, K_N i K_I predstavljaju konstante poluzasićenja za rast stanica koje ovise o ugljičnom dioksidu, dušiku i zračenju ($ML^{-3}, ML^{-3}, L^2T^{-1}N$), dok $g(T)$ predstavlja funkciju temperature koja se može izraziti pretpostavkom eksponencijalne varijacije uzrokovane neoptimalnom temperaturom [17]:

$$g(T) = e^{-m(T-T_{opt})^2} \quad (21)$$

gdje su m empirijska konstanta za neoptimalnu temperaturu (-), T temperatura (Θ), odnosno T_{opt} optimalna temperatura za autotrofni rast (Θ). Dobar primjer integrirajućeg biokinetičkog modela rasta mikroalgi s RDF-om dali su Park i Li (2015.) u znanstvenom radu [29].

6. Zaključak

Proces obrade otpadnih voda izuzetno je kompleksan jer obuhvaća istodobno odvijanje fizikalnih, kemijskih i bioloških procesa, čija međusobna interakcija značajno utječe na učinkovitost sustava. U ovom radu dan je detaljan matematičko-teorijski opis temeljnih procesa transporta, reakcija i biokinetike, pri čemu su korištene parcijalne diferencijalne jednadžbe za opis gibanja fluida, prijenosa topline, tvari i dinamike mikroorganizama. Ovaj teorijski okvir pruža čvrstu osnovu za implementaciju Računalne dinamike fluida (RDF) u modeliranje, simulaciji i optimizaciji procesa pročišćavanja otpadnih voda.

Implementacija RDF-a prikazana u radu obuhvaća modeliranje ključnih faza obrade – od sedimentacije, filtracije i flotacije, do kemijskih reakcija, poput oksidacije i koagulacije, te bioloških procesa uklanjanja hranjivih tvari i rasta mikroalgi. Na taj način RDF omogućuje realističnu simulaciju uvjeta u postrojenjima, identifikaciju neučinkovitosti i optimizaciju dizajna. Posebno je važno naglasiti kako RDF omogućuje analizu energetske potrebe (npr. miješanja i aeracije) te procjenu utjecaja promjena radnih parametara na performanse cijelog sustava.

Trenutačna dostignuća u ovom području uključuju integraciju RDF-a s biokemijskim modelima, razvoj trodimenzionalnih simulacija složenih uređaja te primjenu modela u realnom vremenu za potrebe nadzora i upravljanja postrojenjima. Unatoč značajnom napretku, postoji prostor za poboljšanje u praksi, primjerice u daljnjem smanjenju računalnih zahtjeva simulacija, boljoj integraciji s modelima temeljenima na strojnom učenju te u razvoju metodologija za prijenos rezultata simulacija u konkretne inženjerske odluke i smjernice za upravljanje.

RDF se potvrđuje kao neizostavan alat u suvremenom pročišćavanju otpadnih voda jer omogućuje sveobuhvatnu optimizaciju procesa, smanjenje troškova, povećanje energetske učinkovitosti i doprinos održivom upravljanju resursima. Njegova daljnja primjena i razvoj značajno će unaprijediti učinkovitost i održivost sustava obrade otpadnih voda u budućnosti.

Literatura

- [1] Zhang, J., Tejada-Martínez, A.E. and Zhang, Q. (2014) Developments in CFDs-Based Modeling for Disinfection Technologies over the Last Two Decades: A review. *Environmental Modelling & Software*, 58: 71-85.
- [2] Meister, M., Winkler, D., Rezavand, M. and Rauch, W. (2017) Integrating Hydrodynamics and Biokinetics in Wastewater Treatment Modelling by Using Smoothed Particle Hydrodynamics. *Comp. and Chem. Engineering*, 99: 1-12.
- [3] Wols, B.A., Hofman, J.A.M.H., Uijttewaalt, W.S.J., Rietveld, L.C. and Van Dijk, J.C. (2010) Evaluation of Different Disinfection Calculation Methods Using CFD. *Environmental Modelling & Software*, 25(4): 573-582.
- [4] Glover, G.C., Printemps, C., Essemiani, K. and Meinhold, J. (2006) Modelling of Wastewater Treatment Plants - How Far Shall We Go with Sophisticated Modelling Tools? *Water Science and Technology*, 53(3): 79-89.
- [5] Saliu, A.A., Zamathula, S.N., Fasasi, L.E., Rasheed, O.A., Rasheed, K.O. (2025) Breakthrough Innovations in Water Treatment Process Engineering: A Review of Recent Advances and Future Directions. *MAR 2025, IRE Journals*, Vol. 8, Issue 9, ISSN: 2456-8880
- [6] Zhang, J.P. (2006) An Integrated Design Approach for Improving Drinking Water Ozone Disinfection Treatment Based on CFD. Ph.D. Dissertation, University of Waterloo.
- [7] Eddy, M. (2014) *Wastewater Engineering: Treatment and Resource Recovery*. 5th ed. New York: McGraw-Hill Education.
- [8] Hager, W. (2010) *Wastewater Hydraulics: Theory and Practice*. 2nd ed. New York: Springer.
- [9] Versteeg, H., and Malalasekera, W. (2007) *An Introduction to CFD: The Finite Volume Method*. 2nd ed. London: Pearson Education.
- [10] Crittenden, J.C., Trussell, R.R., Hand, D.W., Howe, K.J. and Tchobanoglous, G. (2012) *MWH's Water Treatment: Principles and Design*. Hoboken, NJ: Wiley.
- [11] Lei, L. and Ni, J. (2014) Three-Dimensional Three-Phase Model for Simulation of Hydrodynamics, Oxygen Mass Transfer, Carbon Oxidation, Nitrification and Denitrification in an Oxidation Ditch. *Water Research*, 53: 200-214.
- [12] Grady, C.L., Daigger, Jr.G.T., Love, N.G. and Filipe, C.D. (2011) *Biological Wastewater Treatment*. CRC Press.
- [13] Zhang, J., Tejada-Martinez, A.E., Zhang, Q. and Lei, H. (2014) Evaluating Hydraulic and Disinfection Efficiencies of a Full-Scale Ozone Contactor Using a RANS-Based Modeling Framework. *Water Research*, 52: 155-167.

- [14] Muñoz-Tamayo, R., Mairet, F. and Bernard, O. (2013) Optimizing Microalgal Production in Raceway Systems. *Biotechnology Progress*, 29(2): 543-552.
- [15] Bernard, O. (2011) Hurdles and Challenges for Modelling and Control of Microalgae for CO₂ Mitigation and Biofuel Production. *Journal of Process Control*, 21(10): 1378-1389.
- [16] Quinn, J., De Winter, L. and Bradley, T. (2011) Microalgae Bulk Growth Model with Application to Industrial Scale Systems. *Bioresource Technology*, 102(8): 5083-5092.
- [17] James, S.C. and Boriah, V. (2010) Modeling Algae Growth in an Open-Channel Raceway. *Journal of Computational Biology*, 17(7): 895-906.
- [18] Le Moullec, Y., Gentric, C., Potier, O. and Leclerc, J.P. (2010) CFD Simulation of the Hydrodynamics and Reactions in an Activated Sludge Channel Reactor of Wastewater Treatment. *Chem. Eng. Sci.*, 65 (1): 492-498.
- [19] Corominas, L., Flores-Alsina, X., Muschalla, D., Neumann, M.B., Vanrolleghem, P.A. (2023), Verification of WWTP Design Guidelines with Activated Sludge Process Models, WEFTEC 2010, 11 pages
- [20] Huang, T., Brouckaert, C.J., Pryor, M. and Buckley, C.A. (2004) Application of CFD Modeling to an Ozone Contactor. *Water SA*, 30(1): 51-56.
- [21] Crittenden, J.C., Trussell, R.R., Hand, D.W., Howe, K.J. and Tchobanoglous, G. (2012) *MWH's water treatment: Principles and design*. Hoboken, NJ: Wiley.
- [22] Li, H., Yi, F., Li, X. et al. (2021) Numerical Modeling of Mass Transfer Processes Coupling with Reaction for the Design of the Ozone Oxidation Treatment of Wastewater. *Frontiers of Chemical Science and Engineering*, 15, 602–614, <https://doi.org/10.1007/s11705-020-1963-4>
- [23] Dooil, K., Chaeyoung, L., Woohyeun, J., Seockheon, L. (2009) Design Optimization of an Ozone Contactor Using Ozone Contactor Model Software, *Environ. Eng. Res.* 2009, 14(4): 244-249
- [24] Cai, Y., Zhao, Y., Wang, C. et al. (2024) Ozone Disinfection of Waterborne Pathogens: A Review of Mechanisms, Applications and Challenges. *Environ. Sci. Pollut. Res.* 31, 60709–60730, <https://doi.org/10.1007/s11356-024-34991-3>
- [25] Tang, G., Adu-Sarkodie, K., Kim, D., Kim, J.H., Teefy, S., Shukairy, H.M. and Marinas, B.J. (2005) Modeling *Cryptosporidium Parvum* Oocyst Inactivation and Bromate Formation in a Full-Scale Ozone Contactor. *Environ. Sci. Technol.*, 39 (23): 9343-9350.
- [26] Zhang, J.P. (2006) An Integrated Design Approach for Improving Drinking Water Ozone Disinfection Treatment Based on CFD. Department of Civil Engineering, Ph.D. dissertation, University of Waterloo.
- [27] Zhang, J., Tejada-Martinez, A.E., Zhang, Q. and Lei, H. (2014) Evaluating Hydraulic and Disinfection Efficiencies of a Full-Scale Ozone Contactor Using a RANS-Based Modeling Framework. *Water Res.*, 52: 155-167.
- [28] Savun-Hekimoğlu, B. (2021) On the Use of Mathematical Models for Wastewater Treatment: A Review and Analysis of Activated Sludge Models

- ASM1 and ASM3, International Journal of Environment and Geoinformatics, 8(1):001-018
- [29] Park, S. and Li, Y. (2015) Integration of Biological Kinetics and Computational Fluid Dynamics to Model the Growth of *Nannochloropsis Salina* in an Open Channel Raceway. *Biotechnol. Bioeng.*, 112 (5): 923-933.
- [30] Hagstrom, G.I., Stock, C.A., Luo, J.Y., Levin, S.A. (2024). Impact of Dynamic Phytoplankton Stoichiometry on Global Scale Patterns of Nutrient Limitation, Nitrogen Fixation, and Carbon Export. *Global Biogeochemical Cycles*, 38, e2023GB007991. <https://doi.org/10.1029/2023GB007991>
- [31] Yang, A. (2011) Modeling and Evaluation of CO₂ Supply and Utilization in Algal Ponds. *Ind. Eng. Res.* 50 (19): 11181-11192.

NOSIVOST T-SPOJA SA SAMONAREZNIM VIJCIMA U TANKOSTJENIM C-PROFILIMA

LOAD-BEARING CAPACITY OF T-JOINTS WITH SELF-TAPPING SCREWS IN THIN-WALLED C-PROFILE

Paulina Krolo*, Josip Malčić, Lazar Lukačević*****

Sažetak

U ovom radu istražuje se mehaničko ponašanje T-spojeva izrađenih od hladnooblikovanih čeličnih C-profila spojenih samonareznim vijcima, s posebnim naglaskom na utjecaj debljine profila i načina izvedbe otvora na nosivost spoja. Analizirani su spojevi s dvije debljine limova, 0,95 mm i 1,15 mm, te dvije varijante otvora – bez ojačanja i s ojačanjem postignutim plastičnim oblikovanjem. Numeričke simulacije provedene su u programu ABAQUS, a valjanost modela potvrđena je usporedbom s relevantnim rezultatima iz literature. Rezultati pokazuju da povećanje debljine limova za približno 21 % rezultira povećanjem maksimalne nosivosti spoja za 15,2 %, ali i promjenom oblika otkazivanja, pri čemu se kritično mjesto otkazivanja premjestilo s čeličnih profila na vijak. Uvođenje ojačanja otvora značajno poboljšava raspodjelu naprezanja i smanjuje lokalne deformacije oko vijčanih rupa. Kod tanjih profila, ojačanje dovodi do povećanja nosivosti za 19,8 %, dok je kod debljih limova porast nosivosti znatno izraženiji, čak 46,7 %. Ojačanje otvora time povećava otpornost spoja na lokalne deformacije i omogućuje bolje iskorištenje kapaciteta čeličnih profila bez prekoračenja njihove granice popuštanja. Pravilan odabir debljine limova, kvalitete vijaka i izvedbe otvora pokazuje se ključnim za osiguranje optimalne nosivosti i sigurnosti T-spojeva u tankostjenim čeličnim konstrukcijama. Dobiveni rezultati predstavljaju vrijedan doprinos razumijevanju ponašanja i optimizaciji spojeva u suvremenim konstrukcijama hladnooblikovanih elemenata.

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: paulina.krolo@gradri.uniri.hr

** Koning Projekt d.o.o., Spinčićeve 4, 52100 Pula

E-mail: josip.malcic@koning-projekt.hr; malcicjosip6@gmail.com

*** I.T.T. d.o.o., Moše Albaharija 10a

E-mail: llukacevic@student.uniri.hr; lazar@itt.hr

Ključne riječi: jednorezni vijčani spoj, hladno oblikovani čelik, samonarezni vijak, tankostjeni C-profil, ABAQUS

Abstract

This paper investigates the mechanical behaviour of T-joints made from cold-formed steel C-profiles connected with self-tapping screws, with a particular emphasis on the influence of profile thickness and hole design on the joint's load-bearing capacity. Joints with two sheet thicknesses, 0.95 mm and 1.15 mm, as well as two hole variants, without reinforcement and with reinforcement, achieved by plastic forming, were analysed. Numerical simulations were performed using ABAQUS software, and the validity of the models was confirmed by comparison with relevant results from the literature. The results show that increasing the sheet thickness by approximately 21% results in a 15.2% increase in the maximum load capacity of the joint, accompanied by a change in the failure mechanism, where the critical failure location shifts from the steel profiles to the screw. Introducing hole reinforcement significantly improves stress distribution and reduces local deformations around the screw holes. For thinner profiles, reinforcement leads to a 19.8% increase in load capacity, while for thicker sheets, the increase is considerably more pronounced, reaching 46.7%. Thus, hole reinforcement enhances the joint's resistance to local deformations and enables better utilization of the steel profiles' capacity without exceeding their yield limit. Proper selection of sheet thickness, screw quality, and hole design proves crucial to ensuring optimal load capacity and safety of T-joints in thin-walled steel structures. The obtained results provide a valuable contribution to the understanding and optimization of joints in modern cold-formed steel constructions.

Key words: single-thread bolted connection, cold-formed steel, self-tapping screw, thin-walled C-profile, ABAQUS

1. Uvod

Konstrukcije izrađene od hladno oblikovanih čeličnih profila (Cold-Formed Steel – CFS) imaju sve intenzivniju primjenu tijekom posljednja dva desetljeća zahvaljujući prednostima koje pružaju industrijska proizvodnja i modularna izgradnja [1]. Ovi sustavi imaju niz prednosti, uključujući malu vlastitu težinu, visoku razinu kvalitete proizvoda postignutu u kontroliranim uvjetima proizvodnje, kao i jednostavan transport i montažu te ubranu izgradnju. Zbog toga su prepoznati kao konkurentna alternativa tradicionalnim zidanim i armiranobetonskim konstrukcijama. Budući da su elementi izrađeni od CFS-a znatno lakši i tanji od konvencionalnih građevinskih elemenata, omogućuju smanjenje ukupne mase konstrukcije, ali i smanjenje bruto grijanog volumena zgrade za istu neto površinu poda. Time se postiže energetska učinkovitost i

smanjuje ugljični otisak zgrade, što je osobito važno u kontekstu održive gradnje i europskih klimatskih ciljeva [2].

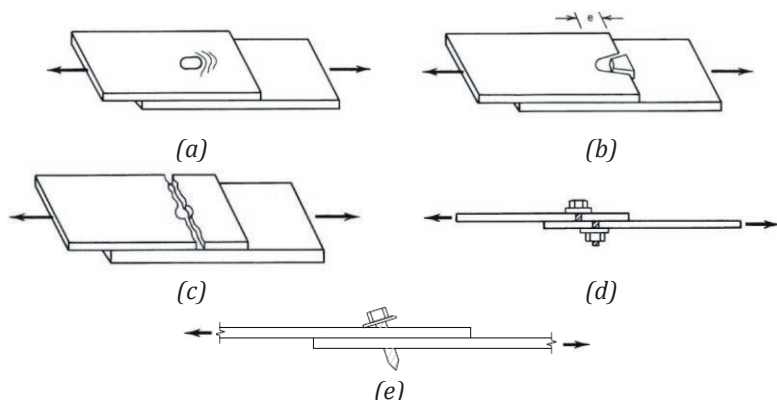
Primjena CFS konstrukcija ima veliki potencijal u europskim zemljama, osobito u gradnji niskih zgrada kao što su obiteljske kuće i višestambeni objekti. Ovi sustavi posebno su pogodni za izradu zidnih i stropnih elemenata u montažnim zgradama, koje postaju sve važnije kako se građevinska industrija sve više oslanja na industrijalizirane procese, potaknuta zahtjevima modernog društva za bržom, učinkovitijom i održivijom gradnjom. Posljednjih godina, predgotovljeni paneli izrađeni od LSF konstrukcija, ispunjeni laganim izolacijskim materijalima i obloženi različitim vrstama ploča, pojavili su se kao relativno novi proizvod u građevinskoj industriji. Takvi elementi se u potpunosti izrađuju u tvorničkim uvjetima, a zatim transportiraju i montiraju na gradilištu, što omogućuje visoku razinu kontrole kvalitete, smanjenje vremena izgradnje i veću predvidljivost troškova [3].

Unatoč navedenim prednostima, spojevi profila izrađenih od CFS-a i dalje predstavljaju značajan konstruktivni i istraživački izazov. U praksi se primjenjuju različiti načini spajanja poput zavarivanja, zakivanja te spajanje matičnim i samobušecim vijcima, slijepim zakovicama i dr. [4,5]. Gotovo sva mehanička spojna sredstva mogu se koristiti za spajanje CFS-profila, pri čemu je svaka vrsta spajala prikladna za specifične kombinacije elemenata koji se međusobno spajaju [6].

Vijci s maticama ugrađuju se u prethodno izbušene rupe u čeličnim profilima. Najčešće korišteni promjeri vijaka kreću se u rasponu od M5 do M16, pri čemu se preporučuje uporaba vijaka razreda čvrstoće 8.8 ili 10.9. Zakovice se također postavljaju u prethodno izrađene rupe. U suvremenoj praksi se sve češće primjenjuju pop-zakovice koje pripadaju kategoriji slijepih zakovica, a postupak spajanja izvodi se ručno ili strojno. Kod spajanja tankostjenih profila, uz standardne vijke s maticama i zakovice, često se koriste i samobušeci te samonarezni vijci. Osnovna razlika između njih ogleda se u načinu ugradnje: samonarezni vijci zahtijevaju prethodno izbušenu rupu, dok samobušeci vijci imaju svrdlo na vrhu vijka, što omogućuje bušenje i pričvršćivanje u jednom koraku [6].

Mehanički spojevi, bilo izvedeni vijcima s maticama, zakovicama, samobušecim ili samonareznim vijcima, podložni su sličnim oblicima otkazivanja. Pod djelovanjem posmičnih sila, limovi najčešće otkazuju zbog deformiranja materijala u području rupe uslijed prekoračenja granice popuštanja čelika (Slika 1a), sloma rubnog dijela lima (Slika 1b), kidanja u neto presjeku (Slika 1c) te posmičnog sloma spajala (Slika 1d) [4]. Dodatno, osobito u spojevima s tankostjenim elementima, značajan oblik otkazivanja predstavlja i otkazivanje uslijed naginjanja vijka (engl. *tilting*)

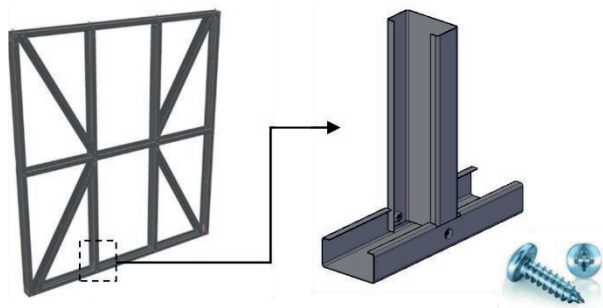
bez ili uz istovremeno lokalno popuštanje materijala oko otvora, pri čemu dolazi do prekomjernog rotacijskog pomaka vijka u otvoru uz djelomični ili potpuni gubitak nosivosti spoja (Slika 1e) [5]. Posljedica takvih oblika otkazivanja je smanjena krutost i duktilnost spoja, što može imati negativan utjecaj na globalnu krutost i duktilnost cijele konstrukcije.



Slika 1. Oblici otkazivanja posmično opterećenih tankih limova spojenih vijkom: (a) pritisak po omotaču rupe, (b) sloma rubnog dijela lima, (c) kidanje neto presjeka i (d) posmični slom spajala [7] i (e) naginjanje vijka [8]

U radu je prikazano istraživanje ponašanja spojeva između ortogonalno spojenih C-profila, tzv. T-spoja, izloženih djelovanju posmičnih sila. T-spoj se koristi za spajanje C-profila unutar sustava CFS okvira (Slika 2). C-profilu spojeni su samonareznim vijcima na pojasnicama profila. U istraživanju su analizirani učinci dviju debljina limova C-profila (0,95 mm i 1,15 mm) te dva načina izvedbe rupe za vijak: sa standardnim rupama bez ojačanja i rupama s ojačanjem dobivenim plastičnim oblikovanjem limova (Slika 3). Ponašanje spojeva evaluirano je numeričkim simulacijama provedenima u programu ABAQUS [9]. Numerički model potvrđen je usporedbom s rezultatima laboratorijskih ispitivanja iz literature [10].

Cilj ovog istraživanja je utvrditi preliminarne vrijednosti nosivosti i karakteristične oblike otkazivanja T-spojeva izrađenih od hladno oblikovanih čeličnih profila, a kako bi se stekao uvid u njihovo mehaničko ponašanje. Dobiveni rezultati poslužiti će kao temelj za planiranje i optimizaciju eksperimentalnih ispitivanja u laboratorijskim uvjetima, s ciljem validacije numeričkih modela i daljnjeg unaprjeđenja konstrukcijskih rješenja.

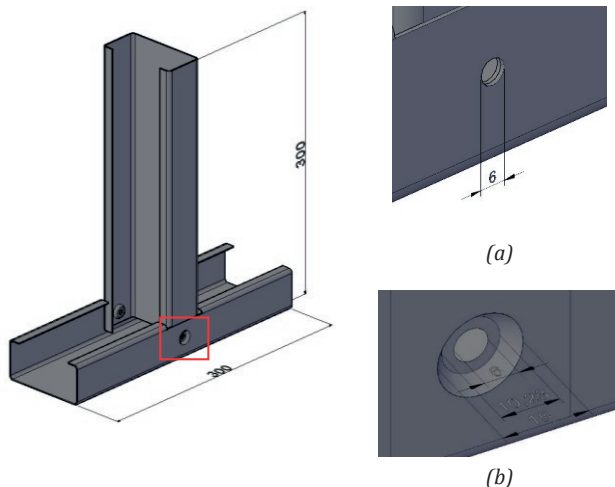


Slika 2. Model CFS okvira s karakterističnim detaljem T-spoja i samonareznim vijkom

2. Geometrija T-spoja i materijal

T-spoj se sastoji od horizontalnog i vertikalnog C-profila međusobno povezanih samonareznim vijcima preko njihovih pojasnica. Oba profila izrađena su od CFS profila C-poprečnog presjeka $89 \times 42 \times 10$ mm, u čeliku klase S550 GD, duljine 300 mm. Za spajanje su primijenjeni samonarezni vijci M6x10mm razreda čvrstoće 10.9.

Istraživanje je obuhvatilo spojeve izvedene s dvjema različitim debljinama stjenke C-profila 0,95 mm i 1,15 mm te dvjema različitim tipovima pripreme rupa za vijke. Prvi tip predstavlja standardnu rupu bez dodatnog ojačanja (Slika 3a), dok drugi uključuje rupe ojačane plastičnim oblikovanjem čeličnih limova (Slika 3b).



Slika 3. T-spoj hladno oblikovanih C-profila a) bez ojačanja rupe za vijak i b) s ojačanja rupe za vijak

Mehanička svojstva čelika klase S550 GD dobivena su standardnim vlačnim ispitivanjem u skladu s međunarodnom normom HRN EN ISO 6892-1:2009 [11] prema metodi A. Ispitivanja su provedena u laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci, primjenom standardnog tlačno-vlačnog stroja Zwick/Roell Z 600. Rezultati su preuzeti iz Izvještaja o ispitivanju [12]. Ispitano je ukupno osam uzoraka, po četiri uzorka debljine 0,95 mm i 1,15 mm. Prosječne vrijednosti Youngovog modula E , gornja granica popuštanja R_{eH} , vlačna čvrstoća R_m , postotak deformacije pri granici popuštanja A_e , postotak ukupne deformacije pri vlačnoj čvrstoći A_{gt} i slomu A_t prikazani su u Tablici 1. Poissonov koeficijent iznosi 0,3.

Tablica 1. Mehanička svojstva čelika S S550 GD [9]

Čelik	E [MPa]	R_{eH} [MPa]	R_m [MPa]	A_e [%]	A_{gt} [%]	A_t [%]
S550 GD (0,95)	171897	653,2	657,2	3,1	6,3	8,5
S550 GD (1,15)	183737	697,2	704,9	3,9	7,4	8,9

Kvaliteta čelika za vijke je 10.9. ima granicu popuštanja $f_{yb} = 900 \text{ N/mm}^2$ te vlačnu čvrstoću $f_{ub} = 1000 \text{ N/mm}^2$. Svojstva čelika C-profila i vijaka u numeričkom modelu opisani su bilineranom funkcijom definiranjem elastičnih i plastičnih svojstava. Nominalne (izmjerene) vrijednosti naprezanja i deformacija pretvorene su u stvarne vrijednosti (eng. True values) primijenom izraza [9]:

$$\sigma_t = \sigma_{nom} \cdot (1 + \varepsilon_{nom}) \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \ln(1 + \varepsilon_{nom}) \quad (2)$$

gdje je

σ_{nom} nominalna (izmjerena) vrijednost naprezanja

ε_{nom} nominalna (izmjerena) vrijednost deformacije

σ_t stvarna vrijednost naprezanja i

ε_t stvarna vrijednost deformacije.

3. Numerički model T-spoja

Izrađena su četiri numerička modela T-spojeva u kojima se razlikuju debljine limova C-profila i način izvedbe rupe za vijak (sa ili bez ojačanja rupe za vijak), Tablica 2.

Tablica 2. Numerički modeli T-spojeva

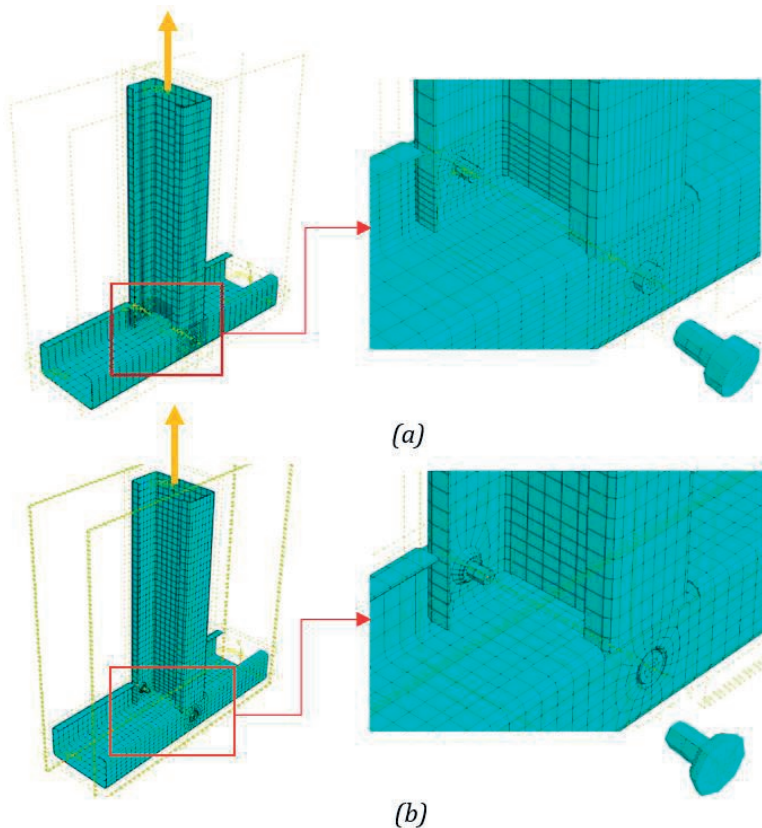
Model	Debljina lima C-profila [mm]	Ojačanje rupe za vijak
T-spoj 0,95	0,95	Ne
T-spoj 0,95 U		Da
T-spoj 1,15	1,15	Ne
T-spoj 1,15 U		Da

C-profilu su modelirani „Solid“ konačnim elementima tipa C3D8R, koji predstavljaju linearne heksaedarske elemente s osam čvorova. Veličina konačnih elemenata je 8 do 10 mm, dok je u području otvora mreža progušćena konačnim elementima od 1 do 3 mm. Vijci su također modelirani „Solid“ konačnim elementima, s promjerom tijela vijka 6 mm i duljinom 10 mm (Slika 4) . Model vijka s ravnom glavom korišten je za modele bez ojačanja rupe, a sa zakošenom glavom za modele s ojačanjem rupe.

U spoju su modelirana tri kontaktna područja: kontakt između vertikalnog i horizontalnog profila, kontakt između glave vijka i profila te kontakt između tijela vijka i ruba rupe na profilu. Područje između profila diskretizirano je „surface to surface“ metodom, a kontakti između vijaka i profila „node to surface“ metodom. Trenje između ploha modelirano je „Penalty“ funkcijom s koeficijentom trenja 0,17. Za modeliranje normalne komponente naprezanja odabran je „Hard“ kontakt.

Rubni uvjeti su zadani na način da su horizontalnom elementu na krajevima spriječeni pomaci i rotacije u svim smjerovima. Simulacija je podijeljena u dva koraka („Step-a“). U prvom koraku su vijcima definirani privremeni rubni uvjeti („Constraint“) tako da su im spriječeni pomaci i rotacije u svim smjerovima te je definiran mali pomak od 0,01 mm kako bi se ostvario kontakt između elemenata. Privremeni rubni uvjeti definirani su samo u modelima bez ojačanja rupe. U modelima s ojačanjem rupe to nije potrebno jer je vijak stabilan zbog ukrućenja te se odmah ostvaruje

kontakt između vijka i profila. U drugom koraku je privremeni rubni uvjet isključen te je nanesen pomak od 5 mm u smjeru vertikalno prema gore (naznačeno narančastom strelicom na Slici 4). Detalji numeričkog modela su dostupni u diplomskom radu [13].

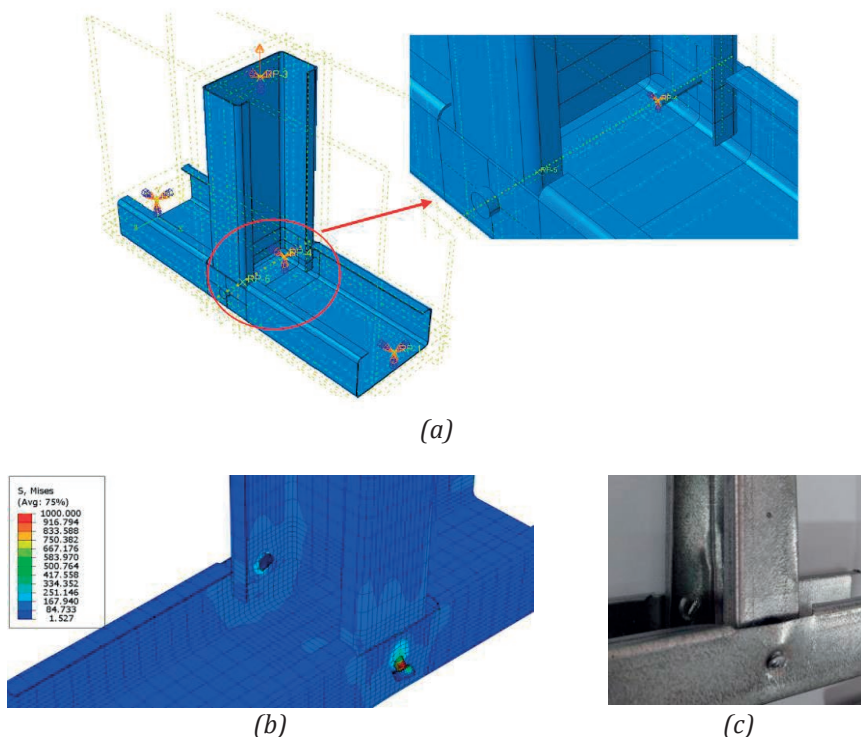


Slika 4. Mreža konačnih elemenata modela T-spoja (a) bez ojačanja rupe za vijak i (b) s ojačanjem rupe za vijak [13]

Validacijski numerički model T-spoja prikazan je na Slici 5a. U modelu je korišten vijak s promjerom tijela 4,8 mm i duljinom tijela 19 mm, pri čemu je primijenjeno pojednostavljeno modeliranje vijka bez navoja radi smanjenja računalne složenosti.

Budući da u izvoru [10] nije definirana točna kvaliteta čelika za vijke niti je bila dostupna krivulja naprezanje–deformacija, u modelu je pretpostavljena kvaliteta čelika 10.9. s granicom popuštanja $f_{yb} = 900 \text{ MPa}$ te vlačnom čvrstoćom $f_{ub} = 1000 \text{ MPa}$. Ostali parametri i karakteristike numeričkog modela (geometrija, materijali, definiranje kontakata i mreža konačnih elemenata) detaljno su opisani u prethodnim

odjeljima rada. Opterećenje je simulirano tako da je nanesen vertikalni pomak od 15 mm. Na slikama 5b i 5c prikazani su oblici otkazivanja validacijskog modela te eksperimentalnog uzorka iz [10].



Slika 5. (a) Rubni uvjeti i djelovanje opterećenja validacijskog modela, (b) oblik otkazivanja validacijskog T-spoja [13] i (c) oblik otkazivanja uzorka iz [10]

Oblici otkazivanja u validacijskom modelu i na ispitnom uzorku iz literature pokazali su vrlo slična ponašanja. Do otkazivanja je došlo izvlačenjem vijka („pull-out“), uzrokovanim njegovim nagnjanjem („tilting“). Iako rezultati nisu identični, uočene razlike mogu se pripisati određenim nesukladnostima između numeričkog modela i fizičkih uzoraka, poput varijacija u kvaliteti vijka te pojednostavljenog modeliranja vijka bez navoja. Unatoč tim razlikama, podudarnost rezultata je dovoljna da se potvrdi valjanost modela i njegova sposobnost pouzdane simulacije ponašanja spojeva.

4. Rezultati i diskusija

4.1 Analiza naprezanja u T-spojevima s C-profilima različitih debljina i izvedbi otvora

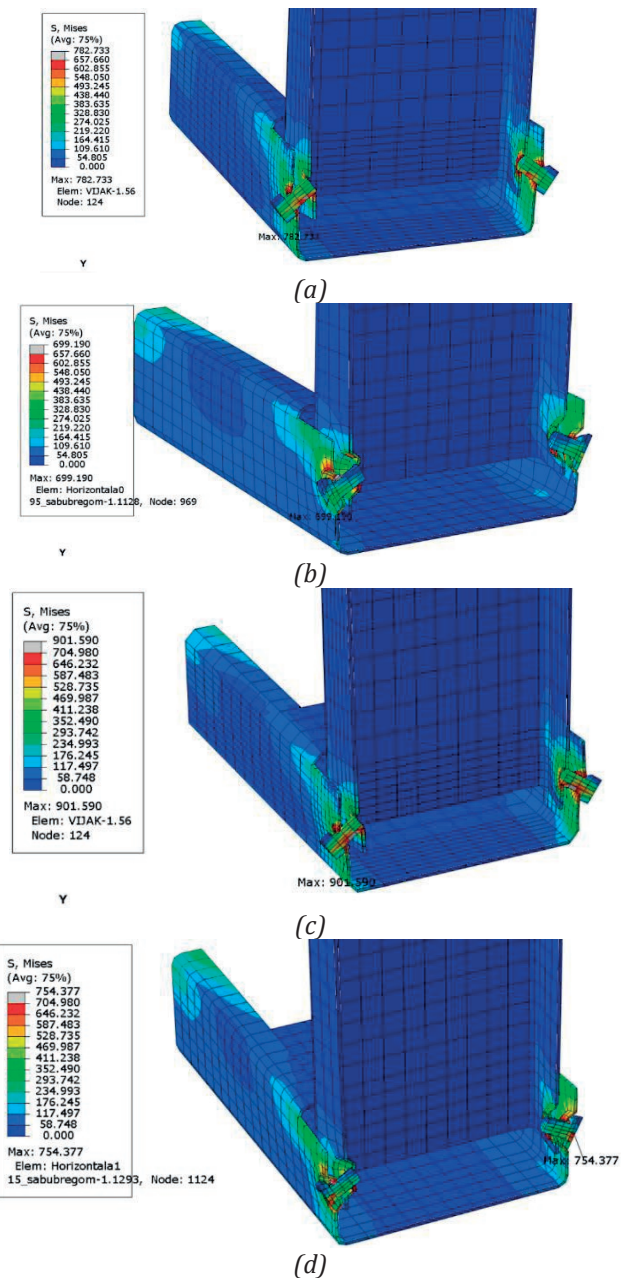
Na slikama 6a–6d prikazana su naprezanja u T-spojevima izrađenima od C-profila različitih debljina, s običnim i ojačanim rupama za vijak.

T-spoj 0,95 (Slika 6a): Spoj s C-profilima debljine 0,95 mm otkazuje uslijed kombiniranog djelovanja naginjanja i izvlačenja vijka, pri čemu dolazi do znatne deformacije profila. Maksimalno naprezanje u vijku iznosilo je 782,73 MPa, što je ispod granice popuštanja vijka (900 MPa). Najveće naprezanje u profilima, 660 MPa, zabilježeno je na rubovima otvora pri pomaku od 5 mm. Otkazivanje spoja počinje pri sili od 5,0 kN, kada naprezanje u limu doseže granicu popuštanja od 653,19 MPa. Kod najveće sile od 5,2 kN, naprezanje u profilu iznosilo je 654,34 MPa, što dovodi do lokaliziranog sloma uslijed tlačnog djelovanja na rubove otvora.

T-spoj 0,95 U (Slika 6b): Kod spoja s ojačanom rupom u istim profilima otkazivanje također nastupa kombinacijom naginjanja i izvlačenja vijka, uz deformaciju profila i slom zbog tlačnog djelovanja po omotaču otvora. Granica popuštanja čelika dosegnuta je pri sili od 5,12 kN (653,19 MPa), a maksimalno naprezanje od 687,93 MPa zabilježeno je pri najvećoj sili od 6,23 kN.

T-spoj 1,15 (Slika 6c): U spoju s debljim C-profilima (1,15 mm), maksimalno naprezanje u vijku iznosilo je 901,59 MPa pri sili od 3,6 kN, čime je dosegnuta granica popuštanja materijala vijka. Najveće naprezanje u čeličnim profilima, 687,46 MPa, zabilježeno je pri pomaku od 5 mm. Pri maksimalnoj sili od 5,99 kN, naprezanje u profilu iznosilo je 677,55 MPa. U oba slučaja, naprezanja su ostala ispod granice popuštanja profila, bez njezina prekoračenja.

T-spoj 1,15 U (Slika 6d): Otkazivanje spoja s ojačanom rupom u profilima debljine 1,15 mm također je rezultat naginjanja i izvlačenja vijka, uz deformaciju čeličnih profila. Najveće naprezanje od 754,38 MPa javlja se na ojačanju oko rupe pri pomaku od 5 mm, što dovodi do sloma uslijed tlačnog djelovanja po omotaču otvora. Granica popuštanja (697,22 MPa) dosegnuta je pri sili od 8,56 kN, dok je pri najvećoj izmjerenoj sili od 8,79 kN naprezanje iznosilo 707,31 MPa.



Slika 6. Von Mises naprezanja za (a) T-spoj 0,95, (b) T-spoj 0,95 U, (c) T-spoj 1,15, (d) T-spoj 1,15 U [10]

4.2 Utjecaj debljine stjenke profila

Usporedba T-spojeva bez ojačanja otvora prikazana je u Tablici 4, gdje su analizirani rezultati za dvije debljine C-profila: 0,95 mm i 1,15 mm. Povećanjem debljine profila za približno 21 %, zabilježeno je povećanje maksimalne nosivosti spoja za 15,2 %. Ovo pokazuje da deblji profil značajno doprinosi povećanju ukupne mehaničke otpornosti spoja.

Tablica 3. Usporedba T-spojeva različite debljine bez ojačanja

Spoj	Debljina lima (mm)	Maks. sila (kN)	Naprezanje u profilu (MPa)	Naprezanje u vijku (MPa)
T-spoj0,95	0,95	5,2	660	782,73
T-spoj1,15	1,15	5,99	680,46	901,59

Uz porast nosivosti, maksimalno naprezanje u čeličnom profilu povećano je za 4,2 %, što upućuje na nešto veću sposobnost profila da prenese veće sile prije otkazivanja. Ipak, najznačajnija promjena uočena je u naprezanju u vijku, koje je poraslo za 15,2 %. Time je naprezanje u vijku kod spoja s debljim profilom doseglo granicu popuštanja materijala vijka (900 MPa).

Ovaj podatak jasno pokazuje da kod spojeva s većom debljinom limova dolazi do promjene dominantnog oblika otkazivanja, dok je kod tanjih profila otkazivanje vezano prvenstveno uz lokalna tlačna naprezanja u čeličnom profilu, a kod debljih limova vijak postaje slabija komponenta spoja. Time je potvrđeno da je ravnoteža između čvrstoće vijka i čvrstoće profila ključna u optimizaciji spojeva, osobito u konstrukcijama koje se izvode s debljim čeličnim elementima. U konačnici, iako povećanje debljine profila doprinosi većoj nosivosti spoja, bez povećanja dimenzija ili čvrstoće vijka može doći do preranog otkazivanja vijaka.

4.3 Utjecaj ojačanja otvora

Usporedba T-spojeva s i bez ojačanja otvora za istu debljinu profila prikazana je u Tablici 4. Rezultati jasno pokazuju pozitivan utjecaj ojačanja otvora na mehanička svojstva spoja, pri čemu je učinak izraženiji kod profila veće debljine.

Tablica 4. Usporedba T-spojeva s i bez ojačanja

Spoj	Debljina lima (mm)	Ojačanje oko rupe	Maks. sila (kN)	Naprezanje u profilu (MPa)
T-spoj 0,95	0,95	Ne	5,2	660
T-spoj 0,95U		Da	6,23	687,93
T-spoj 1,15	1,15	Ne	5,99	687,46
T-spoj 1,15U		Da	8,79	754,38

Kod tanjih C-profila debljine 0,95 mm, uvođenjem ojačanja povećana je maksimalna sila koju spoj može podnijeti s 5,2 kN na 6,23 kN, što predstavlja porast od 19,8 %. Istodobno, najveće naprezanje u čeličnom profilu poraslo je za 4,2 %. Ovo povećanje ukazuje na blago bolju iskoristivost materijala zahvaljujući smanjenju lokalnih koncentracija naprezanja oko rupe za vijak.

Kod debljih profila debljine 1,15 mm, učinak ojačanja još je izraženiji. Maksimalna sila povećana je s 5,99 kN na 8,79 kN, što predstavlja impresivno povećanje od 46,7 %. Također, naprezanje u čeličnim profilima poraslo je s 687,46 MPa na 754,38 MPa, što odgovara porastu od 9,7 %.

Ovi rezultati jasno ukazuju da ojačanje otvora znatno poboljšava nosivost spoja, pri čemu se kod debljih limova učinak povećava višestruko. Razlog tome leži u činjenici da deblji limovi imaju veću sposobnost prenošenja sile, ali istovremeno i veći potencijal za lokalne deformacije i slom uslijed koncentriranih naprezanja. Ojačanje redistribuira naprezanja, čime se smanjuje rizik od lokalnog tlačnog otkazivanja na rubovima otvora, što omogućuje bolje iskorištavanje nosivosti samog profila.

Može se zaključiti da ojačanje otvora predstavlja ključnu mjeru u spojevima izvedenim s debljim čeličnim profilima budući da značajno doprinosi povećanju nosivosti i boljem ponašanju spoja. Kod tanjih profila učinak ojačanja također je prisutan, no njegov doprinos je nešto umjereniji, što je posljedica manje izraženih lokalnih deformacija u području rupe za vijak.

4.4 Učinkovitost T-spoja i oblici otkazivanja

Kod tanjih limova debljine 0,95 mm, otkazivanje spoja nastupa pri nižim razinama opterećenja i nižim vrijednostima naprezanja, što je očekivano s obzirom na manju ukupnu nosivost presjeka. U tim slučajevima su plastične deformacije izraženije, osobito u zoni oko rupe za vijak, gdje dolazi do koncentracije lokalnih naprezanja uslijed tlačnog djelovanja vijka. Oblik otkazivanja uglavnom uključuje lokalni pritisak po omotaču rupe i savijanje stjenki profila, pri čemu spoj gubi nosivost zbog progresivnog deformiranja limova.

Uvođenjem ojačanja rupe kod ovakvih spojeva dolazi do smanjenja lokalnih koncentracija naprezanja i boljeg rasporeda sila u zoni spoja. Time se omogućuje ravnomjernije opterećenje čeličnih limova, smanjuju se lokalna oštećenja i omogućuje veće iskorištenje materijala prije pojave otkazivanja. Iako ukupni porast nosivosti nije dramatičan kao kod debljih profila, pozitivan učinak ojačanja ipak je značajan u smislu povećanja sigurnosti i uporabivosti spoja.

Kod debljih limova, kapacitet profila postaje znatno veći, a spoj može podnijeti veće sile i viša naprezanja. No, istodobno dolazi do preraspodjele naprezanja s čeličnih limova na vijak. Uočeno je da u tim slučajevima naprezanje u vijku raste i iznad granice popuštanja materijala vijka, što ukazuje da vijak postaje najugroženiji element sustava. Iako su limovi sposobni prenositi veće sile, nedovoljno dimenzioniran vijak može dovesti do preranog otkazivanja vijka, što može ugroziti sigurnost konstrukcije.

Ova pojava posebno dolazi do izražaja u spojevima bez ojačanja rupe za vijak, gdje su lokalne sile koncentrirane na manjoj površini oko otvora te dodatno opterećuju vijak. Stoga, pri oblikovanju spojeva s debljim limovima i visokim zahtjevima nosivosti, nužno je voditi računa ne samo o profilu, već i o odabiru odgovarajuće klase čvrstoće i promjera vijka, kao i o mogućem dodatnom ojačanju zone spoja. Na taj se način postiže uravnotežena nosivost svih komponenti spoja, čime se smanjuje rizik od lokalnog otkazivanja i povećava ukupna pouzdanost konstrukcije.

5. Zaključak

Analiza T-spojeva izrađenih od hladnooblikovanih C-profila različitih debljina, s i bez ojačanja otvora, pokazala je važnost pravilnog oblikovanja spojeva u čeličnim konstrukcijama. Uočeno je da debljina profila, kao i prisutnost lokalnog ojačanja oko otvora, značajno utječu na mehaničko ponašanje spoja, način otkazivanja i raspodjelu naprezanja između vijka i čeličnih elemenata. Kod tanjih profila (0,95 mm), otkazivanje se javlja pri nižim silama, uz izraženije deformacije u zoni otvora. U tim slučajevima,

dominantan oblik otkazivanja je lokalni tlačni slom profila zbog pritiska vijka po rubu otvora. Uvođenjem ojačanja postiže se smanjenje koncentracije naprezanja i ravnomjernija preraspodjela sila, čime se povećava nosivost i iskorištenje materijala bez znatnog povećanja naprezanja. Iako su apsolutna povećanja nosivosti umjerena, pozitivni učinci ojačanja jasno su vidljivi i opravdavaju njegovu primjenu. Kod debljih profila (1,15 mm), povećanjem debljine limova dolazi do znatnijeg povećanja nosivosti spoja, ali istodobno se mijenja kritičan oblik otkazivanja. Naime, naprezanje u vijku postaje dominantno i, u nekim slučajevima, doseže ili prelazi granicu popuštanja materijala vijka.

Ojačanje otvora u ovom slučaju ne samo da povećava ukupnu nosivost, već i omogućuje bolju preraspodjelu opterećenja, čime se maksimalno iskorištavaju kapaciteti profila bez preopterećenja vijka. Time se osigurava viša razina sigurnosti i smanjuje rizik od lokalnog sloma u zoni spoja. Rezultati istraživanja potvrđuju da je za postizanje optimalnih svojstava spoja nužno promatrati spoj kao cjelinu, uzimajući u obzir međudjelovanje profila, vijka i lokalnih ojačanja. Pravilnim odabirom debljine limova, dimenzioniranjem vijaka i primjenom ojačanja moguće je značajno unaprijediti mehanička svojstva spoja, povećati nosivost i produljiti vijek trajanja konstrukcije. Ova saznanja posebno su važna u kontekstu modernih čeličnih konstrukcija, gdje se od spojeva očekuje visoka pouzdanost i racionalna potrošnja materijala.

Rezultate provedenih numeričkih simulacija potrebno je dodatno potvrditi laboratorijskim ispitivanjima na stvarnim uzorcima spojeva, sve kako bi se osigurala njihova valjanost i pouzdanost u realnim uvjetima opterećenja. Eksperimentalna ispitivanja omogućit će preciznu identifikaciju stvarnih mehanizama otkazivanja, ponašanja materijala i kontaktnih fenomena, uključujući utjecaj deformacija, trenja i lokalnih plastičnih zona koje je teško u potpunosti obuhvatiti numeričkim modelima. Na temelju tako dobivenih rezultata moguće je provesti kalibraciju i optimizaciju numeričkih modela, uključujući poboljšanja u definiranju graničnih uvjeta, kontaktnih parametara i materijalnih nelinearnosti. Time će se povećati točnost predviđanja ponašanja spojeva, što je od presudne važnosti za buduću inženjersku primjenu i razvoj sigurnih i učinkovitih konstrukcijskih sustava izrađenih od tankostjenih čeličnih profila.

Zahvala. Istraživanje financirano je iz znanstveno razvojnog projekta UNIRI INOVA „Inovativni priključak za spajanje konstrukcijskih elemenata od tankostjenih čeličnih C-profila“ provedenog uz potporu Sveučilišta u Rijeci, te iz IRI 2 projekta „Pregdotovljene zgrade gotovo nulte energije proizvedene na industrijski način“. Ovo istraživanje predstavlja nastavak i

proširenje istraživanja započetog u okviru Diplomskog rada studenta Josipa Malčića.

Literatura

- [1] Kajaharan T., Elilarasi K., Perampalam G., Keerthan P., Heshachanaa R., Thadshajini S. and Madhushan D. (2021) Sustainable Performance of a Modular Building System Made. Buildings, 11(460)
- [2] Kozlovská M., Mokrenko D., Struková Z., and Špak M., (2022) The Potential of Lightweight Panel Systems in Building Industry. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1252
- [3] Liang, H., Roy, K., Fang, Z., and Lim, J. B. P. (2022) A Critical Review on Optimization of Cold-Formed Steel Members for Better Structural and Thermal Performances. Buildings, 12(34)
- [4] Komara, I.; Wahyuni E.; Suprobo, P. A study on Cold-formed Steel Frame Connection: A review, The Journal for Technology and Science, 2017, vol. 28, no. 3, pp. 83-89
- [5] Lee, Y. H.; Tan, C. S.; Mohammad, S.; Tahir, M. M.; Shek, P. N. Review on Cold-Formed Steel Connections, The Scientific World Journal, 2014, vol. 2014, p. 11 pages.
- [6] Dubina, D., Ungureanu, V., Landolfo, R. (2012) Design of Cold-Formed Steel Structures, Eurocode 3: Design of Steel Structures Part 1-3- Design of Cold-Formed Steel Structures, 1st Edition
- [7] Yu, W.-W., Laboube, R. A. and Chen, H. (2020) Cold-Formed Steel Design (First edition), Chennai: John Wiley & Sons.
- [8] Chao, S., Lu, L., & Wu, H. (2018). Shearing Bearing Capacity of Screwed Connections of Thin Steel Sheets. International Journal of Steel Structures.
- [9] ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.14. Dassault Systèmes Simulia Corp.
- [10] Taranu, G., Toma, I.-O. (2021) Experimental Investigation and Numerical Simulation of C Shape Thin-Walled Steel Profile Joints. Buildings, 11(12), 636
- [11] HRN EN ISO 6892-1:2010, Metalni materijali -- Vlačno ispitivanje -- 1. dio: Metoda ispitivanja pri sobnoj temperaturi
- [12] Krolo, P., Bakran, A., Lukačević, L. (2021) Polimerna pjena, gips vlaknaste ploče, hladno oblikovani čelik, kompozitni paneli. Izvještaj o ispitivanju. Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci
- [13] Malčić, J. (2022) Nosivost spojeva sa samobušecim vijcima u tankostjenim C-profilima. Diplomski rad. Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci

PARAMETARSKA ANALIZA PREVRTANJA ZIDA PROČELJA IZVAN RAVNINE

PARAMETRIC ANALYSIS OF OUT-OF-PLANE FAÇADE OVERTURNING

Ena Škreblin*, Paulo Šćulac**

Sažetak

Zidane konstrukcije pokazuju veliku ranjivost uslijed potresa. U ovom radu naglasak je stavljen na mehanizme otkazivanja zidova izvan ravnine, koji se javljaju zbog nedovoljne povezanosti zidova i stropova. Analizirani su sljedeći mehanizmi otkazivanja zidova izvan ravnine: i) prevrtanje zida pročelja, te ii) prevrtanje zida pročelja s bočnim zidom. Provedena je parametarska analiza te su izrađeni dijagrami faktora aktivacije mehanizma i spektralnog ubrzanja. Analiza se temelji na definiranju geometrije blokova koji su uključeni u mehanizam, rubnim uvjetima i opterećenju zida. Faktor aktivacije mehanizma može se dobiti primjenom principa virtualnog rada ili pomoću uvjeta ravnoteže momenta prevrtanja i stabilizirajućeg momenta. Na temelju faktora aktivacije mehanizma dobiva se vrijednost spektralnog ubrzanja aktiviranja mehanizma koja treba zadovoljiti kriterije graničnih stanja. Razmatran je i učinak stabilizirajućih horizontalnih sila u obliku zatega u ravnini stropne konstrukcije.

Ključne riječi: zidane konstrukcije, potresno opterećenje, otkazivanje zidova izvan ravnine, linearna kinematička analiza

Abstract

Masonry structures show great vulnerability during earthquakes. In this paper, emphasis is placed on the out-of-plane failure mechanisms, which occur due to inadequate wall-to-wall and wall-to-floor connections. The following out-of-plane façade overturning mechanisms are analysed: i) vertical overturning of the façade and ii) overturning of the façade with one side wing. A parametric analysis was

* LMT Čelik, Vidikovački Venac 085, 11000 Beograd

E-mail: enaskreblin@icloud.com

** Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: paulo.sculac@uniri.hr

carried out and diagrams of the activation factors of the mechanism and spectral acceleration were created. The analysis is based on defining the geometry of the blocks included in the mechanism, the boundary conditions and the loads acting on the wall. The activation factor of the mechanism can be obtained by applying the principle of virtual work or by using the equilibrium equation of the overturning and the stabilizing moment. Based on the activation factor of the mechanism, the value of the spectral acceleration of the activation of the mechanism is obtained, which should meet the criteria of limit states. The effect of stabilizing horizontal forces in the form of ties installed in the floor plane was also considered.

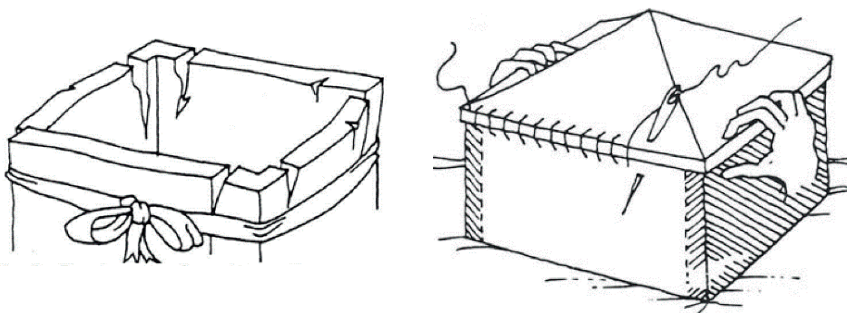
Key words: masonry structures, seismic actions, out-of-plane wall failure, linear kinematic analysis

1. Uvod

Nedavni potresi u Zagrebu i Petrinji ponovno su nas podsjetili kako su povijesne zidane zgrade vrlo ranjive na potresna opterećenja. Općenito, zidovi opterećeni horizontalnim silama mogu otkazati u ravnini ili izvan ravnine. U slučaju nedovoljne povezanosti zidova sa stropnom i krovnom konstrukcijom te s drugim zidovima, najprije dolazi do otkazivanja zidova izvan ravnine, a pritom nosivost zidova u ravnini nije iscrpljena. Najčešće se otkazivanje izvan ravnine pojavljuje kod fasadnih i zabatnih zidova [1].

Kako bi promijenili mehanizam otkazivanja zidova iz nepoželjnog otkazivanja izvan ravnine u poželjni mehanizam otkazivanja u ravnini (pod uvjetom da je zide dobre kvalitete), potrebno je prikladnim vezama osigurati da se cjelokupna konstrukcija ponaša kao cjelina (eng. box-like behaviour), Slika 1. To uključuje detalje poput: većih kamenih blokova na uglovima zgrade, prikladan zidarski vez na spoju zidova, horizontalne vezne grede, upotrebu čeličnih ili drvenih zatega [2,3,4]. Stropna i krovna konstrukcija imaju važnu ulogu u osiguranju cjelovitosti zgrade i prijenosu horizontalnog opterećenja na zidove te je stoga potrebno osigurati da se horizontalne konstrukcije ponašaju kao dijafragme i prikladno povezati zidove s horizontalnom konstrukcijom. Kako su potresi relativno rijetka pojava, toj se vezi često nije pridavalo dovoljno pažnje [5], posebno kod zgrada skromnije izvedbe.

U ovom radu razmatrana su dva karakteristična mehanizma otkazivanja pročelja izvan ravnine: i) prevrtanje zida pročelja i ii) prevrtanje zida pročelja s bočnim zidom. Analiza je provedena za pročelje s dva kata. Provedena je parametarska analiza te su izrađeni dijagrami faktora aktivacije mehanizma i spektralnog ubrzanja, koji se mogu koristiti za brzu provjeru otkazivanja pročelja izvan ravnine. Za slučaj prevrtanja zida pročelja razmatran je i učinak stabilizirajućih horizontalnih sila u obliku zatega ugrađenih u ravnini stropne konstrukcije.



Slika 1. Koncept osiguranja cjelovitosti konstrukcije [6]

2. Mehanizmi otkazivanja zidova izvan ravnine

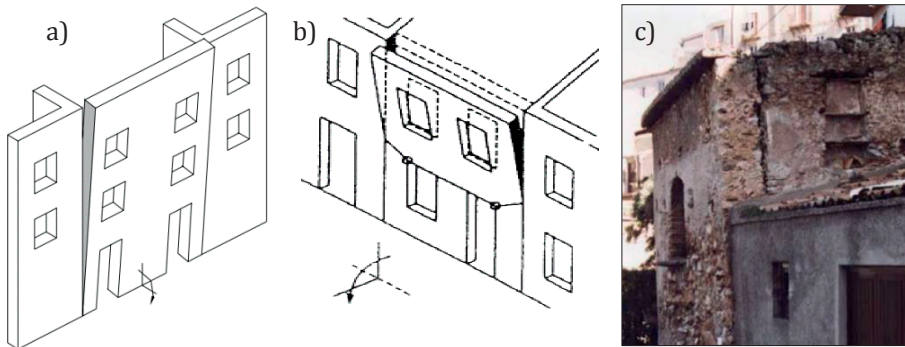
2.1 Analiza lokalnih mehanizama

Budući da u trenutno važećoj normi za ocjenu postojećih zgrada HRN EN 1998-3 [7] nisu definirane preporuke za analizu lokalnih mehanizama, primijenjene su preporuke i zahtjevi prema talijanskom tehničkom propisu za gradnju NTC 2008 [8]. U radu je razmatrana linearna kinematička analiza, koja se temelji na vrijednostima sila.

Za primjenu metode analize pretpostavlja se kako: (i) zide nema vlačnu čvrstoću, (ii) nema klizanja između blokova te (iii) zide ima beskonačnu tlačnu čvrstoću [9]. Najprije je na zgradi potrebno identificirati kruta tijela i definirati ravnine sloma, tj. transformirati dio konstrukcije u mehanizam (ili kinematički lanac).

2.2 Prevrtanje zida pročelja

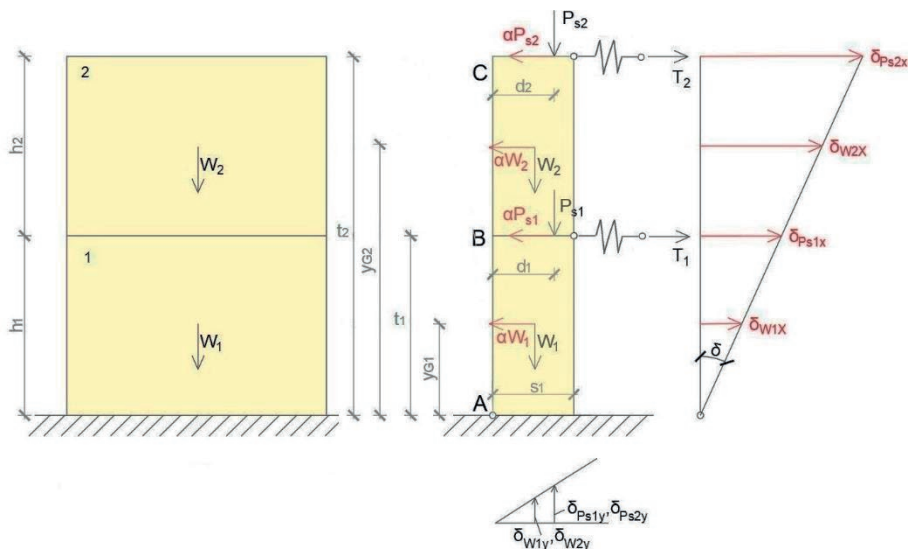
Ovaj mehanizam otkazivanja zidova izvan ravnine odnosi se na prevrtanje zida pročelja bez sudjelovanja bočnih zidova, a prvenstveno se javlja uslijed nepovezanosti pročelja i krovne konstrukcije te bočnih zidova ili ako je postojeća veza nedovoljna [10]. Mehanizam otkazivanja se definira kao rotacija krutog tijela – cijelog pročelja (Slika 2a) ili samo dijela pročelja (Slika 2b) izvan ravnine. Javljaju se vertikalne pukotine na spoju s bočnim zidovima, a u podnožju zida ili u razini otvora formira se horizontalni linijski zglobov oko kojeg se odvija rotacija pročelja. Ostali parametri koji utječu na aktivaciju ovog mehanizma su: nedovoljna povezanost stropne konstrukcije sa zidovima (izostanak zatega i veznih greda), fleksibilne stropne konstrukcije, stropne konstrukcije koje uzrokuju potisak na zidove (npr. od svodova i lukova), loš zidni vez s poprečnim zidovima, dvoslojni zidovi s lošom vezom između slojeva (nedovoljno vežnjaka) [11].



Slika 2. Prevrtnanje zida pročelja: a) shema aktivacije cijelog pročelja [10], b) shema aktivacije samo dijela pročelja [11], c) primjer [11]

U nastavku je analiziran zid pročelja koji se sastoji od prizemlja i kata; promatra se kao kruti blok koji je od ostatka konstrukcije odvojen s dvije vertikalne pukotine (Slika 3 i objašnjenja u Tablici 1). Rotacija pročelja odvija se oko horizontalnog linijskog zgloba u podnožju (oko točke A). Uz vlastitu težinu zidova W_1 i težinu stropnih konstrukcija P_{s1} bit će razmatrane i horizontalne sile u zategama T_i , postavljene u ravnini stropne konstrukcije (u točkama B i C).

Linearna kinematička analiza temelji se na određivanju horizontalnih ekvivalentnih statičkih sila $\alpha \cdot W_i$ i $\alpha \cdot P_{si}$ koje će aktivirati prevrtanje zida izvan ravnine [1,9]. Pritom α , s kojim se množe sve vertikalne sile težina, predstavlja faktor aktivacije mehanizma.



Slika 3. Geometrija zida, oznake sila te plan virtualnih pomaka

Tablica 1. Objašnjenje oznaka sa Slike 3

Oznaka	Objašnjenje
i	broj kata ($i = 1, \dots, n$)
n	ukupan broj katova uključenih u mehanizam
W_i	vlastita težina zida na katu i koja djeluje u težištu bloka i
P_{si}	težina stropne konstrukcije koja djeluje na zid na katu i
T_i	sila u zategi koja se nalazi u ravnini stropne konstrukcije na katu i
s_i	debljina zida na katu i
h_i	visina zida na katu i
d_i	horizontalna udaljenost hvatišta sile P_{si} od linijskog zgloba
y_{Gi}	vertikalna udaljenost hvatišta sile W_i od linijskog zgloba
$\delta_{wi,x} \delta_{psi,x}$	virtualni horizontalni pomak sila W_i te P_{si} i T_i
$\delta_{wi,y} \delta_{psi,y}$	virtualni vertikalni pomak sila W_i i P_{si}

Prema Slici 3 može se definirati stabilizirajući moment [11]:

$$M_S = \sum_{i=1}^n W_i \cdot \frac{s_i}{2} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot d_i + \sum_{i=1}^n T_i \cdot t_i, \quad (1)$$

te moment prevrtanja:

$$M_P = \alpha \cdot [\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_{Gi} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot t_i]. \quad (2)$$

Izjednačavanjem izraza (1) i (2) dobivamo faktor aktivacije mehanizma:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot \frac{s_i}{2} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot d_i + \sum_{i=1}^n T_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_{Gi} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot t_i}, \quad (3)$$

odnosno, u ovom slučaju za dva kata ($n=2$):

$$\alpha = \frac{W_1 \cdot \frac{s_1}{2} + W_2 \cdot \frac{s_2}{2} + P_{s1} \cdot d_1 + P_{s2} \cdot d_2 + T_1 \cdot t_1 + T_2 \cdot t_2}{W_1 \cdot y_{G1} + W_2 \cdot y_{G2} + P_{s1} \cdot t_1 + P_{s2} \cdot t_2}. \quad (4)$$

Faktor aktivacije mehanizma može se dobiti i primjenom principa virtualnog rada, izjednačavanjem rada vanjskih sila na virtualnim pomacima i rada unutarnjih sila na virtualnim deformacijama. Budući da promatramo kruta tijela, rad unutarnjih sila jednak je nuli, tj. analizira se samo rad vlastite težine zida, opterećenja koja djeluju na zid (u ovom slučaju težine stropne konstrukcije), zatega te horizontalnih sila $\alpha \cdot W_i$ i $\alpha \cdot P_{si}$, koje su proporcionalne vertikalnom opterećenju. Zadaje se virtualni pomak na način da se kruti blok zarotira za jedinični kut δ (Slika 3).

Virtualni rad vanjskih sila može se definirati kao:

$$\alpha \cdot (\sum_{i=1}^n W_i \cdot \delta_{wix} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot \delta_{psix}) - \sum_{i=1}^n W_i \cdot \delta_{wi y} - \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot \delta_{psiy} - \sum_{i=1}^n T_i \cdot \delta_{psix} = 0, \quad (5)$$

iz čega se dobiva faktor aktivacije mehanizma:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot \delta_{wiy} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot \delta_{psiy} + \sum_{i=1}^n T_i \cdot \delta_{psix}}{\sum_{i=1}^n W_i \cdot \delta_{wix} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot \delta_{psix}}. \quad (6)$$

U slučaju malenih pomaka, virtualni pomaci jednaki su:

$$\delta_{wix} = \delta \cdot y_{Gi}, \delta_{psix} = \delta \cdot t_i, \delta_{wiy} = \delta \cdot \frac{s_i}{2}, \delta_{psiy} = \delta \cdot d_i, \quad (7)$$

koji za jedinični kut $\delta=1$ postaju

$$\delta_{wix} = y_{Gi}, \delta_{psix} = t_i, \delta_{wiy} = \frac{s_i}{2}, \delta_{psiy} = d_i, \quad (8)$$

čime izraz (6) postaje jednak izrazu (4) dobivenom iz uvjeta ravnoteže momenta prevrtanja i stabilizirajućeg momenta.

Za slučaj kada su zidovi u prizemlju i na katu jednake visine i debljine ($h_2=h_1$, $s_2=s_1$, odnosno $W_2=W_1$), stropne konstrukcije jednake težine ($P_{s2}=P_{s1}$) te hvatište sila P_{si} iznosi $d_2=d_1=3/4 \cdot s_1$, bez razmatranja zatega ($T_1=T_2=0$), izraz (3) tada postaje:

$$\alpha = \frac{W_1 \cdot s_1 + P_{s1} \cdot \frac{3}{2} s_1}{W_1 \cdot 2h_1 + P_{s1} \cdot 3h_1} = \frac{s_1}{2 \cdot h_1}, \quad (9)$$

tj. faktor aktivacije mehanizma ovisi samo o vitkosti zida.

Dijagram faktora aktivacije mehanizma u ovisnosti o vitkosti zida jedne etaže h_1/s_1 prikazan je na Slici 4a.

Razmatramo li i utjecaj zatega u razini stropa iznad prizemlja ($T_1 \neq 0$), iz izraza (3) dobivamo:

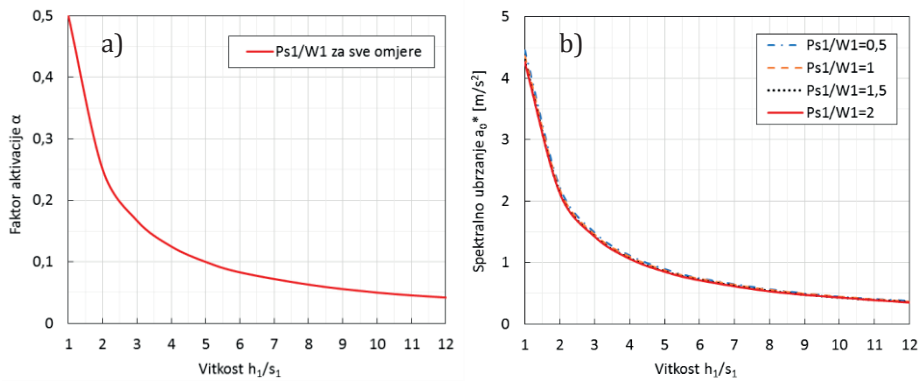
$$\alpha = \frac{W_1 \cdot s_1 + P_{s1} \cdot \frac{3}{2} s_1 + T_1 \cdot t_1}{W_1 \cdot 2h_1 + P_{s1} \cdot 3h_1}, \quad (10)$$

dok u slučaju postojanja zatega u razini stropa iznad kata ($T_2 \neq 0$) faktor aktivacije mehanizma postaje:

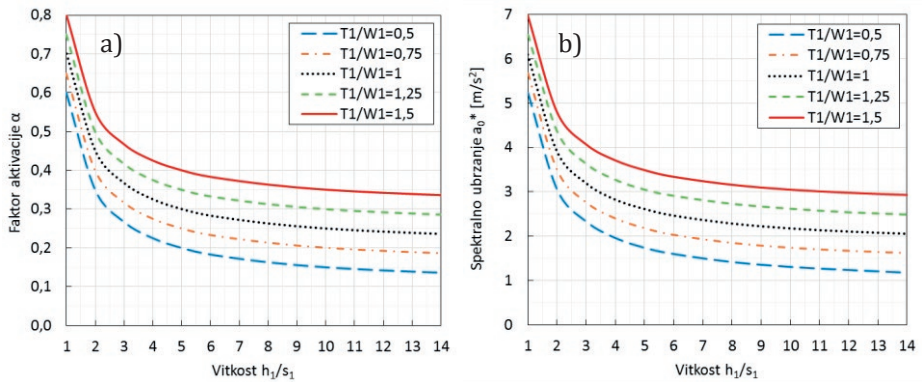
$$\alpha = \frac{W_1 \cdot s_1 + P_{s1} \cdot \frac{3}{2} s_1 + T_2 \cdot t_2}{W_1 \cdot 2h_1 + P_{s1} \cdot 3h_1}. \quad (11)$$

Dijagrami faktora aktivacije mehanizma u ovisnosti o vitkosti zida jedne etaže h_1/s_1 za slučaj postojanja zatega T_1 ili T_2 prikazani su redom na Slikama 5a i 6a, za različite vrijednosti sila u zategama. Pritom je usvojeno $P_{s1}=P_{s2}=W_1=W_2$.

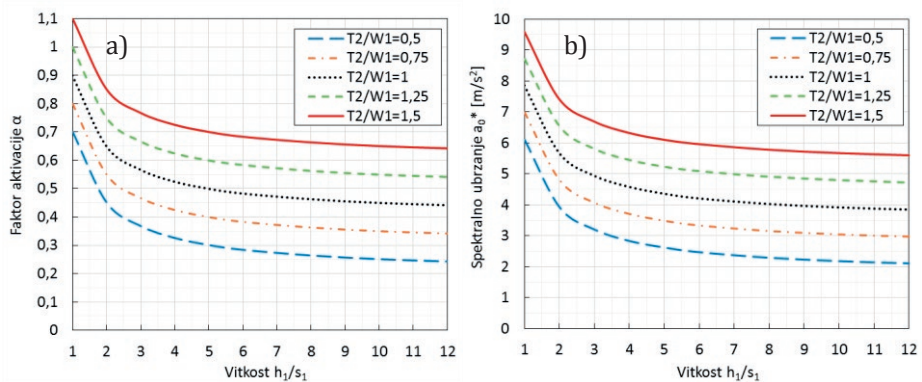
Već je jasno vidljivo iz izraza (10) i (11) kako će učinak zatega značajno utjecati na povećanje faktora aktivacije budući da se u brojniku javlja dodatni doprinos $T_i \cdot t_i$ (veća vrijednost stabilizirajućeg momenta). Za jednake vrijednosti sila T_1 i T_2 , učinak će biti veći kod postojanja zatega T_2 budući da je krak sile t_2 veći od t_1 (usporediti Slike 5a i 6a).



Slika 4. Dijagrami: a) faktora aktivacije i b) spektralnog ubrzanja za $T_1=T_2=0$



Slika 5. Dijagrami: a) faktora aktivacije i b) spektralnog ubrzanja za $T_1 \neq 0$



Slika 6. Dijagrami: a) faktora aktivacije i b) spektralnog ubrzanja za $T_2 \neq 0$

Za provjeru zahtjeva s obzirom na potresnu situaciju djelovanja potrebno je na osnovu dobivenog faktora aktivacije mehanizma odrediti pripadajuće spektralno ubrzanje ekvivalentnog sustava s jednim stupnjem slobode [9,1]:

$$a_0^* = \frac{\alpha \cdot g}{e^* \cdot FP}, \quad (12)$$

gdje je g ubrzanje sile teže, e^* faktor udjela modalne mase, a FP faktor povjerenja. U slučaju kada se za proračun faktora aktivacije ne uzima u obzir tlačna čvrstoća zida (tj. uz pretpostavku krutih blokova), preporuča se koristiti faktor povjerenja koji se odnosi na razinu znanja RZ1 (ograničeno znanje) koji iznosi 1,35.

Faktor udjela modalne mase računa se uzimanjem u obzir svih sila težina koje imaju inercijalni učinak (u ovom slučaju W_i i P_{si}):

$$e^* = \frac{g \cdot M^*}{\sum_{i=1}^n W_i + \sum_{i=1}^n P_{si}}, \quad (13)$$

pri čemu je modalna masa M^* definirana kao:

$$M^* = \frac{(\sum_{i=1}^n W_i \cdot \delta_{wix} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot \delta_{psix})^2}{g \cdot (\sum_{i=1}^n W_i \delta_{wix}^2 + \sum_{i=1}^n P_{si} \delta_{psix}^2)}. \quad (14)$$

Provjera sigurnosti prema graničnim stanjima bit će zadovoljena ako je spektralno ubrzanje aktivacije mehanizma a_0^* veće od vršnog ubrzanja potresnog zahtjeva. U Tablici 2 prikazane su vrijednosti vršnog ubrzanja s kojima se provodi provjera sigurnosti u slučaju kada se provjera odnosi na izolirani element ili dio konstrukcije koji je uglavnom oslonjen na tlo [9].

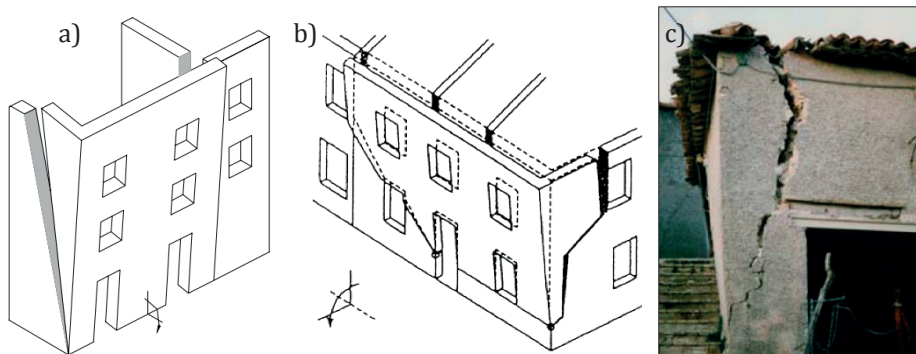
Tablica 2. Provjera sigurnosti prema graničnom stanju [9]

Granično stanje oštećenja	Krajnje granično stanje
$a_0^* \geq a_g(P_{VR}) \cdot S$	$a_0^* \geq \frac{a_g(P_{VR}) \cdot S}{q}$
$a_g(P_{VR})$ – vršno ubrzanje tla koje se određuje na temelju vjerojatnosti prekoračenja promatranog graničnog stanja i referentnog vijeka zgrade S – faktor tla q – faktor konstrukcije (može se usvojiti vrijednost $q=2$)	

Na Slikama 4b, 5b i 6b prikazani su dijagrami spektralnog ubrzanja u ovisnosti o vitkosti zida jedne etaže h_1/s_1 . Vidljivo je kako zatege značajno doprinose stabilnosti zida jer povećavaju spektralno ubrzanje.

2.3 Prevrtanje zida pročelja s bočnim zidom

U usporedbi s prethodno razmatranim mehanizmom, ovaj će se mehanizam pojaviti u slučaju postojanja učinkovite veze između zida pročelja i bočnih zidova [10]. U bočnim se zidovima javljaju kose pukotine te se formira kruto tijelo koje se sastoji od pročelja i dijela bočnih zidova u obliku klina (Slika 7). Pritom mogu biti uključeni samo jedan ili oba bočna zida, ovisno o kvaliteti zida i rasporedu otvora u bočnim zidovima. Rotacija krutog tijela se odvija oko horizontalnog linijskog zgloba koji se pojavljuje na pročelju (ne nužno u podnožju). Razvoju ovog mehanizma doprinose otvori u blizini ugla te žiđe slabijih mehaničkih svojstava [11].



Slika 7. Prevrtanje zida pročelja s bočnim zidom: a) shema aktivacije cijelog pročelja [10], b) shema aktivacije dijela pročelja [11], c) primjer [11]

U ovom slučaju analiziramo kruto tijelo koji se sastoji od zida pročelja (prizemlja i kata) te dijela bočnog zida u obliku klina, koje je od ostatka konstrukcije odvojeno jednom vertikalnom i jednom kosom pukotinom (Slika 8). Kut nagiba klina označen je s β , W_{oi} predstavlja vlastitu težinu klina na katu i , dok su x_{GOi} i y_{GOi} redom horizontalna i vertikalna udaljenost hvatišta sile W_{oi} do linijskog zgloba u točki A. U ovom mehanizmu nije razmatran učinak zatega.

Analogno kao u izrazu (3), uz uključenje težine bočnog zida W_{oi} , izvodi se faktor aktivacije mehanizma:

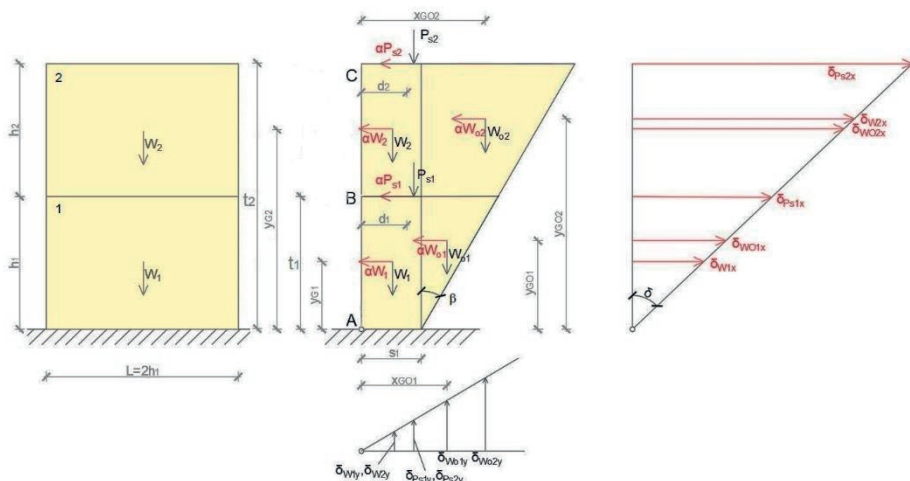
$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot \frac{s_i}{2} + \sum_{i=1}^n W_{oi} \cdot x_{GOi} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_{GOi} + \sum_{i=1}^n W_{oi} \cdot y_{GOi} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot t_i} \quad (15)$$

Faktor udjela modalne mase računa se uzimanjem u obzir svih sila težina koje imaju inercijalni učinak (W_i , W_{oi} i P_{si}):

$$e^* = \frac{g \cdot M^*}{\sum_{i=1}^n W_i + \sum_{i=1}^n W_{oi} + \sum_{i=1}^n P_{si}}, \quad (16)$$

pri čemu je modalna masa M^* jednaka:

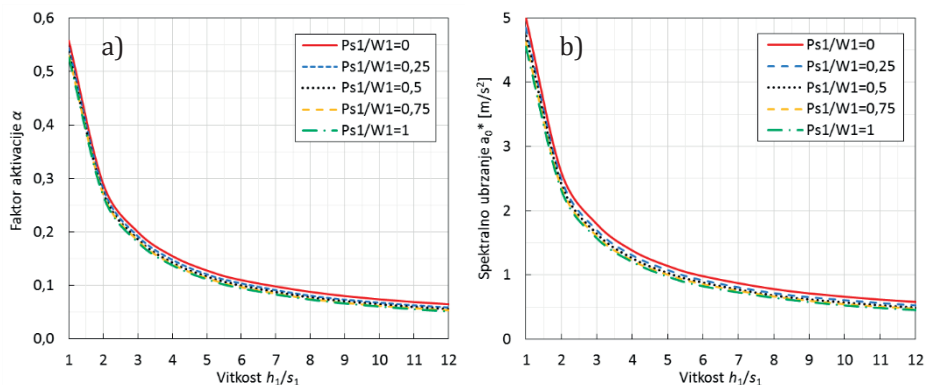
$$M^* = \frac{(\sum_{i=1}^n W_i \cdot \delta_{wix} + \sum_{i=1}^n W_{oi} \cdot \delta_{woix} + \sum_{i=1}^n P_{si} \cdot \delta_{psix})^2}{g \cdot (\sum_{i=1}^n W_i \delta_{wix}^2 + \sum_{i=1}^n W_{oi} \delta_{woix}^2 + \sum_{i=1}^n P_{si} \delta_{psix}^2)} \quad (17)$$



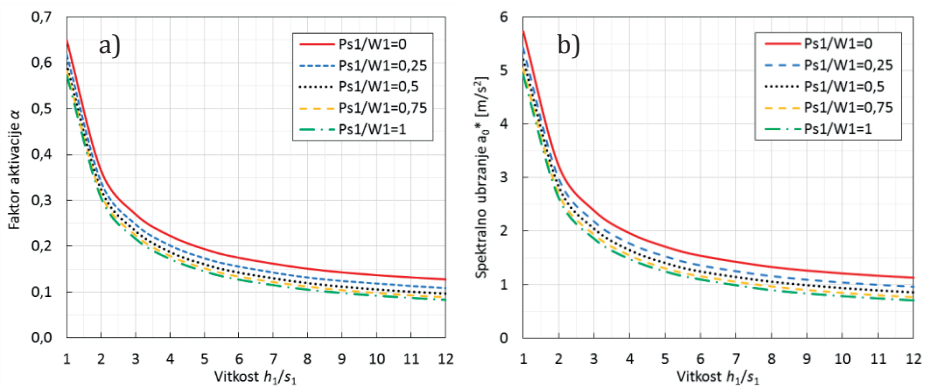
Slika 8. Geometrija zida, oznake sila te plan virtualnih pomaka

Na Slikama 9, 10 i 11 prikazani su dijagrami faktora aktivacije mehanizma i spektralnog ubrzanja redom za kut nagiba klina β od 15° , 30° i 45° u ovisnosti o vitkosti zida jedne etaže h_1/s_1 . Pretpostavljena je jednaka visina i debljina zidova u prizemlju i na katu ($h_2=h_1$, $s_2=s_1$), stropne konstrukcije jednake težine ($P_{s2}=P_{s1}$) te hvatište sila P_{si} na udaljenosti $d_2=d_1=3/4 \cdot s_1$.

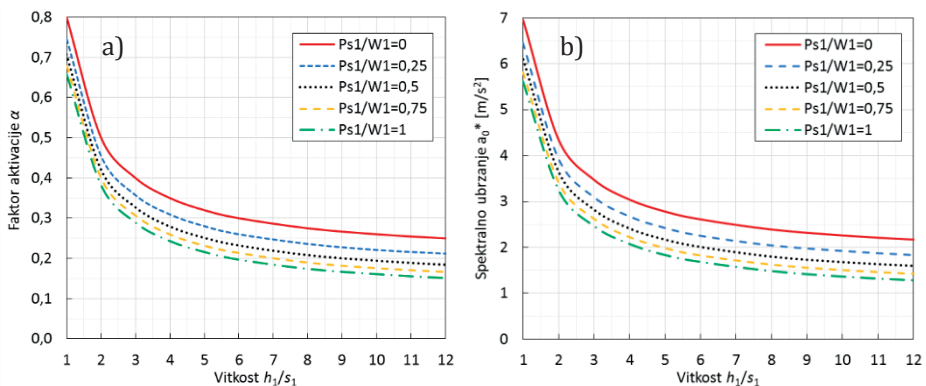
Ovaj mehanizam s dodatnim bočnim klinom daje veće vrijednosti faktora aktivacije u usporedbi s pročeljem bez klina. Veći nagib klina β daje veći volumen bočnog klina, koji djeluje stabilizacijski, te se s povećanjem nagiba klina povećava i faktor aktivacije mehanizma.



Slika 9. Dijagrami: a) faktora aktivacije i b) spektralnog ubrzanja za $\beta=15^\circ$



Slika 10. Dijagrami: a) faktora aktivacije i b) spektralnog ubrzanja za $\beta=30^\circ$



Slika 11. Dijagrami: a) faktora aktivacije i b) spektralnog ubrzanja za $\beta=45^\circ$

3. Zaključak

U ovom radu promatran je model dvokatnog jednoslojnog zida na otkazivanje prevrtanjem izvan ravnine. Provedena je parametarska analiza u kojoj su varirani omjeri težina stropne konstrukcije u odnosu na težinu zida, vitkost zida, učinak zatega i nagib kosog bočnog klina. Dobiveni dijagrami faktora aktivacije mehanizma i spektralnog ubrzanja mogu se koristiti za brzu provjeru otkazivanja pročelja izvan ravnine.

Pokazano je kako se faktor aktivacije mehanizma smanjuje s povećanjem vitkosti zida. Osim vitkosti, bitan čimbenik ima prisutnost zatega. Mala vrijednost sile u zatezi može povoljno djelovati na mehanizam te osigurati pridržanje zida i cjelovitost konstrukcije. Za dobivanje realnijih vrijednosti faktora aktivacije u budućem se radu planira uzeti u obzir učinak trenja između blokova te ograničenu tlačnu čvrstoću zida na način da se zglobovi ne nalaze točno na rubu poprečnog presjeka zida.

Zahvala. Rad je proizašao iz diplomskog rada Ene Škreblin „Analiza mehanizama otkazivanja zidova izvan ravnine na višekatnoj zgradi“, te je *rezultat rada na projekta „Razrada metodologije za ocjenu potresne otpornosti postojećih zidanih građevina na Kvarnerskom Primorju (uniri-iskusni-tehnic-23-198)“* provedenog uz potporu Sveučilišta u Rijeci.

Literatura

- [1] Demšić, M., Uroš, M., Šavor Novak, M., Atalić, J., Baniček, M. (2021) Otkazivanje zidova izvan ravnine. U: Uroš, M., Todorić, M., Crnogorac, M. i dr., ur. POTRESNO INŽENJERSTVO – Obnova zidanih zgrada, Zagreb: Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.
- [2] M. Tomažević, M. (1999) Earthquake-Resistant Design of Masonry Buildings (Series on Innovations in Structures and Construction, Vol 1), Imperial College Press.
- [3] D'Ayala, D., Paganoni, S. (2011) Assessment and Analysis of Damage in L'Aquila Historic City Centre after 6th April 2009, Bulletin of Earthquake Engineering, 9, str. 81-104. doi: <https://doi.org/10.1007/s10518-010-9224-4>
- [4] Šćulac, P., Galjanić, K., Grandić, D., Mihaljević, J., Smolčić, Ž. (2025) Ties in Unreinforced Masonry Structures: Case study in Krk. U: Atalić, J., Torić, N., Šavor Novak, M. i dr., ur. 3rd Croatian Conference on Earthquake Engineering - Conference Proceedings, Sveučilište u Zagrebu i Sveučilište u Splitu.
- [5] Belamarić, J. ur. (2007) Pouke baštine: za gradnju u hrvatskom priobalju, Zagreb, Hrvatska gospodarska komora.
- [6] Toulaitos, P.G. (1996) Seismic Behaviour of Traditionally-Built Constructions. U: Petrini, V., Save, M., ur. Protection of the Architectural Heritage Against Earthquakes. Vienna: International Centre for Mechanical Sciences, vol 359. Springer, str. 57-69.
- [7] HRN EN 1998-3:2008 Eurokod 8: Projektiranje konstrukcija otpornih na potres - 3. dio: Ocjenjivanje i obnova zgrada (EN 1998-3:2005), Hrvatski zavod za norme, 2008.
- [8] Norme tecniche per le costruzioni NTC 2008 – DM 14 gennaio 2008, Ministero delle infrastrutture, Roma, 2008.
- [9] CIRCOLARE 2 febbraio 2009 , n. 617, Istruzioni per l'applicazione delle "Norme tecniche per le costruzioni" di cui al decreto ministeriale 14 gennaio 2008. Ministero delle infrastrutture e dei trasporti, Roma, 2009.
- [10] D'Ayala, D., Speranza, E. (2002) An Integrated Procedure for the Assessment of Seismic Vulnerability of Historic Buildings, 12th European Conference on Earthquake Engineering, Paper 561.
- [11] Repertorio dei meccanismi di danno, delle tecniche di intervento e dei relativi costi negli edifici in muratura. Sisma Marche 1997, Tipografia Grafiche Scarponi s.r.l., Osimo (AN).

ANALITIČKO RJEŠENJE TOPLINSKIH UČINAKA KOD LAMELIRANOG STAKLA S POPUSTLJIVIM VEZNIM SLOJEM

ANALYTICAL SOLUTION FOR THERMAL EFFECTS IN LAMINATED GLASS WITH A COMPLIANT INTERLAYER

Vita Veljačić*, Leo Škec*, Dragan Ribarić*

Sažetak

Ovaj rad bavi se analizom toplinskih učinaka kod spregnutih nosača korištenjem analitičkog rješenja za dvoslojnu gredu za tri vrste modela: potpuno spregnutih (bez klizanja između slojeva), djelomično spregnutih (ograničeno klizanje) i nespregnutih nosača (slobodno klizanje). Kao primjer kompozitnog nosača odabrano je lamelirano staklo. Mogućnosti i točnost analitičkog rješenja potvrđeni su usporedbom s eksperimentalnim rezultatima iz literature uzimajući pritom u obzir da povećanje temperature uzrokuje postupno popuštanje međusloja u lameliranom staklu.

Ključne riječi: *spregnuti nosači, lamelirano staklo, analitičko rješenje, toplinski učinci, popustljivi vezni sloj*

Abstract

This paper analyses the thermal effects in composite beams using an analytical solution for a two-layer beam across three types of models: fully composite (no slip between layers), partially composite (limited slip) and non-composite beams (free slip). Laminated glass is selected as a representative example of a composite beam. The applicability and accuracy of the analytical solution are verified by a comparison to experimental results from the literature, taking into account that rising temperatures cause gradual softening of the interlayer in laminated glass.

Key words: *composite structures, laminated glass, analytical solution, thermal effects, compliant interface*

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
E-mail: veljacivita1@gmail.com, {leo.skec, dragan.ribaric}@gradri.uniri.hr

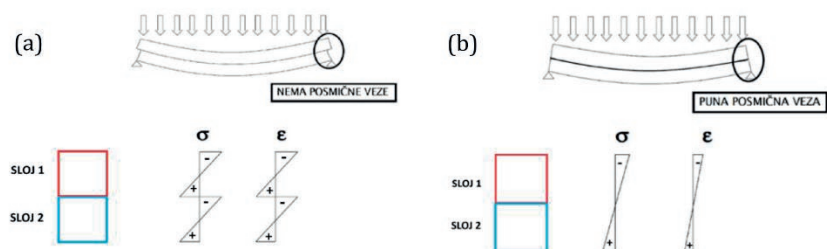
1. Uvod

Spregnuti (kompozitni) nosači su konstruktivni elementi koji se sastoje od dva ili više međusobno povezana dijela od istog ili različitih materijala. Ključ spregnutog djelovanja je prijenos smične sile na dodirnoj plohi, zbog čega se sve komponente pod opterećenjem ponašaju kao jedinstveni presjek. U usporedbi s nespregnutim presjekom jednake geometrije, takav nosač postiže znatno veću savojnu krutost i manji progib, što omogućuje manju potrošnju materijala i niže troškove izvedbe. Sprezanjem različitih materijala mogu se sinergijski iskoristiti njihove komplementarne karakteristike (npr. beton nosi tlak, čelik vlačna naprezanja), pa se s manjom masom i troškovima postižu veći rasponi, veća krutost, bolja požarna otpornost i dugotrajnija konstrukcija nego što bi to omogućio bilo koji materijal zasebno. Kada se elementi istog materijala pravilno spregnu, dobivamo presjek s boljom krutosti, stabilnošću i prilagodljivošću nego što bi to omogućio pojedinačni masivni komad.

Nespregnuti nosač je sustav u kojem nema posmične veze između dva sloja nosača, pa stoga na krajevima nosača postoji relativni pomak između slojeva (Slika 1(a)). Svaki element unutar nespregnutog nosača nosi dio opterećenja proporcionalan svojoj krutosti i prilikom savijanja se deformira nezavisno od susjednog elementa, što rezultira pojavom vlačnih i tlačnih naprezanja u oba sloja.

Nasuprot tome, u spregnutom nosaču između slojeva postoji puna posmična veza. Ova veza omogućuje da se oba elementa ponašaju kao jedinstveni presjek, bez relativnog horizontalnog pomaka između elemenata na krajevima (Slika 1(b)). To znači da se prilikom savijanja normalne deformacije linearno mijenjaju po visini kompozitnog presjeka (progib za oba sloja mora biti jednak na dodirnoj liniji), kao što je to slučaj kod monolitnih greda. Primjenom Hookeovog zakona, odnosno pretpostavkom linearno-elastičnog ponašanja materijala, slijedi i da raspodjela normalnih naprezanja mora biti linearna po visini kompozitnog presjeka, kao što je prikazano na Slici 1(b). Na taj se način postiže da jedan sloj primarno preuzima vlačna, a drugi tlačna naprezanja [1].

Spojni sistem daje naglasak na posmične sile koje djeluju na kontaktnoj plohi između dva različita materijala. Cilj spoja je na optimalan način uključiti oba materijala u nosivost spregnutog nosača. Savršen spoj koji sprječava svaki relativni pomak između slojeva omogućio bi potpuni prijenos normalnih i posmičnih naprezanja i osigurao optimalnu izvedbu spoja. Međutim, veze u praksi pokazuju konačnu krutost, tako da se na spoju između slojeva mogu pojaviti relativni poprečni i uzdužni pomaci (uzdizanja i klizanja).



Slika 1. Raspodjela napreznja (a) nespregnutog i (b) spregnutog nosača [1]

Standardno određivanje krutosti spregnutih elemenata određuje se postupkom zamjenskog poprečnog presjeka. Čitav presjek pretvara se u samo jedan materijal na način da se dijelu od preostalog materijala površina i moment površine II. reda (moment inercije) množe faktorom koji označava omjer modula elastičnosti dva zadana materijala. Time dobivamo jedinstveni poprečni presjek koji predstavlja kombinirane karakteristike oba materijala, pri čemu se pretpostavlja da je sprezanje između dva dijela presjeka savršeno (nema klizanja ili uzdizanja) [1].

Posebna vrsta spregnutih nosača koja se u novije vrijeme sve više koristi u građevinskim konstrukcijama je lamelirano staklo. Radi se o vrsti stakla koje se sastoji od dvije ili više staklenih ploča zalijepljenih međusobno po cijeloj površini međuslojem koji adhezivno prianja na staklo i svojim mehaničkim svojstvima omogućava djelomično sprezanje ploča [2]. Međusloj je najčešće od polivinil-butirala (PVB), etilen-vinil-acetata (EVA) ili ionoplastike, a, osim sprezanja, funkcija mu je da u slučaju loma drži fragmente stakla na okupu te povećava duktilnost i požarnu otpornost elementa.

Poseban fokus u ovom radu bit će posvećen analizi lameliranog (dvoslojnog) stakla i njegovom ponašanju pri višim temperaturama [3-5]. Materijali se pod utjecajem temperature šire ili skupljaju. Kod spregnutih konstrukcija, razlike u toplinskom širenju između različitih materijala mogu stvoriti dodatna napreznja (tzv. temperaturna ili toplinska napreznja), što može dovesti do neželjenih efekata poput pukotina, izvijanja ili gubitka nosivosti. Staklo loše provodi toplinu, što znači da različiti dijelovi staklene ploče mogu imati različite temperature u isto vrijeme. Stoga, u situaciji kada je temperatura u vanjskom okruženju znatno drugačija od temperature u unutrašnjosti konstrukcije, dolazi do toplinskih napreznja koja mogu dovesti do pukotina ili sloma.

Značajan doprinos razvoju analitičkih modela lameliranog stakla s podatnim međuslojevima dali su Galuppi i Royer-Carfagni, posebice kroz formulacije efektivne debljine [6-8]. Njihovi rezultati poslužili su i kao temelj za izradu europskih smjernica za projektiranje staklenih

komponenti [9], izvješća zajedničkog istraživačkog centra Europske komisije koje predstavlja pre-normativni dokument i osnovu za novi Eurokod 10.

Ovaj rad nadovezuje se na ta istraživanja proširujući analitičko rješenje dvoslojne grede na toplinske učinke u lameliranom staklu. Takvi proračunski alati mogu doprinijeti građevinskoj praksi u područjima gdje se lamelirano staklo koristi u uvjetima izloženosti povišenim temperaturama. To se posebno odnosi na staklene fasadne sustave, krovne konstrukcije, kao i na elemente koji moraju zadržati nosivost i sigurnosnu funkciju tijekom požara ili dugotrajne sunčeve izloženosti. Razumijevanje toplinskih učinaka i podatnosti međusloja stoga može pridonijeti pouzdanijem dimenzioniranju i povećanoj sigurnosti konstrukcija.

2. Analitička rješenja za dvoslojnu gredu s popustljivim kontaktom i toplinskim učincima

Svaki sloj spregnutog nosača zasebno se modelira kao Timošenkova greda (uzima se u obzir i deformacija uslijed posmičnih naprezanja), uz pretpostavku da među slojevima nema poprečnog razmicanja i da na istoj uzdužnoj koordinati oba sloja imaju isti zaokret poprečnog presjeka. Ponašanje spojnog sistema je linearno elastično i definirano je parametrom koji označava posmičnu krutost na kontaktu. Materijalne i geometrijske osobine svakog sloja mogu se zadavati nezavisno, pa je model primjenjiv za analizu različitih tipova spregnutih nosača, kao što su čelik-beton, drvo-beton, staklo-drvo itd. Prednost ovakvog modela u odnosu na standardni pristup, koji koristi postupak zamjenskog poprečnog presjeka [5], je u tome što omogućava određivanje raspodjele unutrašnjih sila i naprezanja u svakom sloju pojedinačno za spojni sistem koji dozvoljava (ali i ograničava) klizanje između slojeva. Također, ovaj pristup je jednostavniji i brži za korištenje od 2D i 3D modela po metodi konačnih elemenata jer je potrebno riješiti relativno mali sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

U radu su korištena tri modela po uzoru na rad Siciliana i koautora [10]:

- **Model RRR** – spriječeno klizanje među slojevima jer je spojni sistem apsolutno krut (posjeduje beskonačnu krutost)
- **Model CRR** – ograničeno klizanje među slojevima jer spojni sistem ima konačnu krutost i time pruža otpor klizanju

- **Model ORR** – slobodno klizanje među slojevima jer nema spojnog sistema (što odgovara spojnom sistemu čija je krutost jednaka nuli).

U ovim kraticama, prvo, drugo i treće slovo odnose se na tri vrste popustljivosti spoja (klizanje, uzdizanje i relativno rotiranje poprečnog presjeka, slijedom), pri čemu R („rigid“) znači da nema popustljivosti spoja, C („compliant“) se odnosi na popustljivo sprezanje, a 0 znači da sprezanja nema. Stoga je vidljivo da u sva tri modela pretpostavljamo da nema uzdizanja i relativnog rotiranja poprečnih presjeka susjednih slojeva, dok po pitanju klizanja imamo tri različite situacije (spriječeno, ograničeno i slobodno klizanje). U analitičkom rješenju za dvoslojnu gredu u svakom su sloju dodatno uzete u obzir temperaturne deformacije uslijed promjene temperature, pri čemu je pretpostavljena linearna promjena temperature po debljini sloja, dok u uzdužnom smjeru promjene temperature nema.

Analitičko rješenje za dvoslojnu gredu prikazano je kroz analizu dvije zasebne grede s odgovarajućom vezom između njih. Pretpostavlja se da među slojevima nema poprečnog pomaka te da na istoj uzdužnoj koordinati oba sloja imaju jednak zaokret poprečnog presjeka. Osnovne jednadžbe problema čine kinematičke, konstitutivne i ravnotežne jednadžbe za svaki sloj te vezne jednadžbe koje definiraju vezu između slojeva.

2.1 Osnovne jednadžbe problema

2.1.1 Kinematičke jednadžbe

Deformacije i zakrivljenost povezuju se s pomacima i kutom zaokreta poprečnog presjeka putem kinematičkih jednadžbi. Pozitivan uzdužni pomak (u) je u smjeru osi x , poprečni (w) u smjeru osi z , a kut zaokreta (θ) oko osi y u smjeru kazaljke na satu (Slika 2).

Za dvoslojnu gredu, kinematičke jednadžbe definiraju se zasebno za svaki sloj, uz indekse $i = 1, 2$ (donji i gornji sloj). Svaki sloj ima vlastiti sustav osi (x_i, y_i, z_i), pomake (u_i, w_i) i kut zaokreta (θ_i). Pretpostavlja se $x=x_1=x_2$, da su osi z_i težišne osi svakog sloja te da se savijanje događa oko osi y_i , koja je ujedno i os simetrije presjeka. Na temelju pretpostavki da između slojeva nema relativnog poprečnog razmicanja i rotiranja uvodimo: $w_1 = w_2 = w$ i $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Kinematičke jednadžbe za sloj i dvoslojne grede glase:

$$\varepsilon_{0i} = \frac{du_i}{dx}, \quad (1)$$

$$\gamma_i = \frac{dw}{dx} - \theta, \quad (2)$$

$$\kappa_i = -\frac{d\theta}{dx} \quad (3)$$

gdje je ε_{0i} uzdužna (aksijalna) deformacija, γ_i kut smicanja, κ_i zakrivljenost sloja i .

2.1.2 Konstitutivne jednadžbe

Uz pretpostavku linearnog odnosa između naprezanja i deformacija, veza unutrašnjih sila (rezultanti naprezanja) i deformacija svakog sloja opisana je odgovarajućim konstitutivnim jednadžbama:

$$N_i = E_i A_i \varepsilon_{0i}, \quad (4)$$

$$T_i = G_i A_{si} \gamma_i, \quad (5)$$

$$M_i = E_i I_i \kappa_i, \quad (6)$$

gdje su N_i i T_i uzdužna i poprečna sila, a M_i moment savijanja u sloju i . Aksijalna krutost je $E_i A_i$, gdje su E_i Youngov modul elastičnosti, a A_i površina poprečnog presjeka. Posmična krutost je $G_i A_{si}$, pri čemu je $A_{si} = A_i k_{si}$ s korekcijskim faktorom $k_{si} = 5/6$ za pravokutni presjek, a G_i modul posmika za sloj i . Krutost na savijanje definirana je kao $E_i I_i$, gdje je I_i moment površine II. reda poprečnog presjeka sloja i u odnosu na os y_i .

U konstitutivne jednadžbe uvodi se i utjecaj promjene temperature po visini sloja, čime dolazi do dodatne zakrivljenosti (κ) i promjene uzdužne deformacije (ε). Pretpostavlja se da temperatura varira samo po visini svakog sloja, dok je u uzdužnom smjeru konstantna. Model polazi od referentne temperature pri kojoj nema toplinskih učinaka, dok promjena temperature $\Delta T(z)$ u odnosu na referentnu temperaturu uzrokuje dodatna naprezanja i deformacije.

Konstitutivne jednadžbe koje uključuju utjecaj temperature glase:

$$N_i = E_i A_i \left(\varepsilon_i - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} + \Delta T_{di}}{2} \right), \quad (7)$$

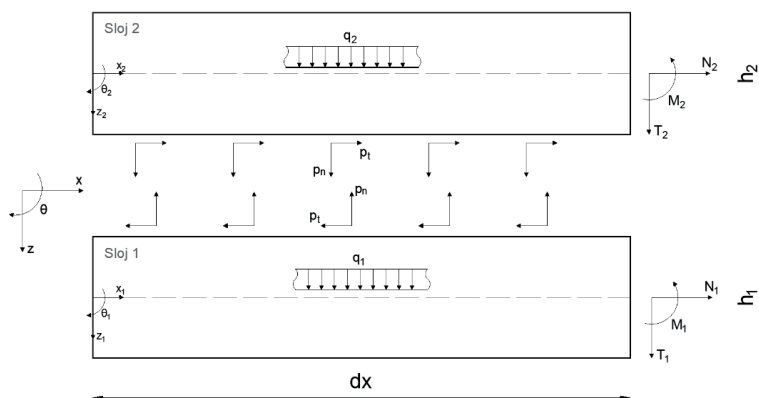
$$T_i = G_i A s_i \gamma_i, \quad (8)$$

$$M_i = E_i I_i \left(\kappa_i + \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} - \Delta T_{di}}{h_i} \right), \quad (9)$$

gdje je α_{Ti} koeficijent linearnog toplinskog rastezanja, a ΔT_{gi} i ΔT_{di} promjene temperature na gornjem i donjem rubu sloja i (Slika 3(b)).

2.1.3 Ravnotežne jednadžbe

Jednadžbe ravnoteže povezuju vanjska opterećenja i unutarnje sile za svaki sloj. Kontaktna naprezanja između slojeva u tangencijalnom i normalnom smjeru označena su s p_t i p_n (Slika 2).



Slika 2. Dijagram slobodnog tijela i konvencija predznaka

Budući da je analiza geometrijski linearna, ravnotežne jednadžbe zapisane su za početnu (nedeformiranu) konfiguraciju na sljedeći način:

$$\frac{dN_1}{dx} - p_t = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dN_2}{dx} + p_t = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dT_1}{dx} + \frac{dT_2}{dx} + q_1 + q_2 = 0, \quad (12)$$

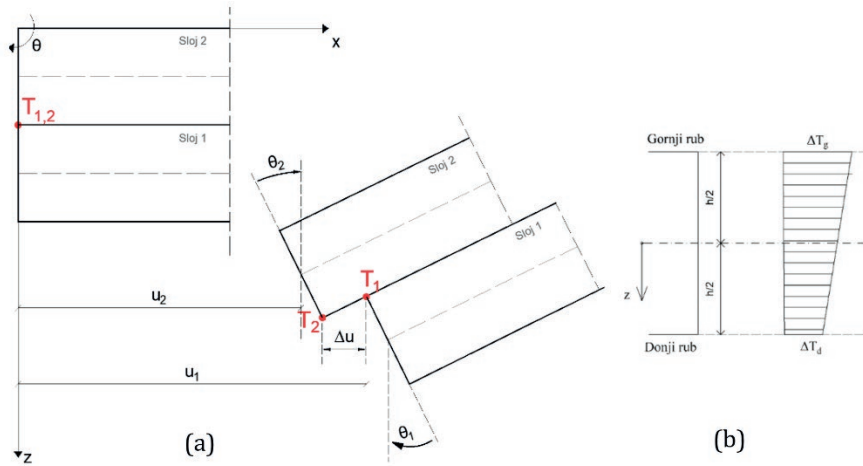
$$\frac{dM_1}{dx} - T_1 + p_t \frac{h_1}{2} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dM_2}{dx} - T_2 + p_t \frac{h_2}{2} = 0, \quad (14)$$

gdje su N_i i T_i uzdužna i poprečna sila, M_i moment savijanja u sloju i , a q_i opterećenja za svaki sloj (pri čemu je $i = 1, 2$).

2.1.4 Vezne jednadžbe

Vezne jednadžbe povezuju slojeve u cjelinu i omogućuju rješavanje sustava jednadžbi. U deformiranom položaju, točka $T_{1,2}$ se dijeli na T_1 i T_2 , pri čemu nema poprečnog razmicanja slojeva, a presjeci imaju isti kut rotacije ($\theta_1 = \theta_2$) (Slika 3(a)).



Slika 3. (a) Shematski prikaz relativnog klizanja između dva sloja dvoslojne grede, (b) promjena temperature po visini presjeka

Relativno klizanje Δu definira se kao razlika horizontalnih pomaka gornjeg ruba donjeg sloja i donjeg ruba gornjeg sloja:

$$\Delta u = u_1 - u_2 + h_0 \theta, \quad (15)$$

gdje je $h_0 = (h_1 + h_2)/2$.

2.2 Model RRR

Budući da kod ovog modela nema klizanja među slojevima, vrijedi $\Delta u = 0$ pa iz jednadžbe (15) možemo izraziti nepoznanicu u_1 preko u_2 i θ . Kombiniranjem prethodnih jednadžbi dolazimo do sustava s tri diferencijalne jednadžbe i tri nepoznanice (u_2 , w i θ):

$$EA_0 u_2'' - E_1 A_1 h_0 \theta'' = 0, \quad (16)$$

$$q_0 + GA_{s0} (w'' - \theta') = 0 \quad (17)$$

$$-GA_{s0} (w' - \theta) - E_2 A_2 h_0 u_2'' - EI_0 \theta'' = 0, \quad (18)$$

gdje su $EA_0 = E_1 A_1 + E_2 A_2$, $GA_{s0} = G_1 A_{s1} + G_2 A_{s2}$, te $EI_0 = E_1 I_1 + E_2 I_2$. Sustav smo riješili pomoću Wolfram Mathematica, dobivajući funkcije $u_2(x)$, $w(x)$ i $\theta(x)$ sa šest konstanti integracije koje se određuju iz šest rubnih uvjeta, ovisno o problemu.

3.3 Model CRR

U ovom modelu dozvoljeno je klizanje ($\Delta u \neq 0$), pa, za razliku od modela RRR, za reduciranje broja nepoznanica ne možemo koristiti jednadžbu (15). Javljaju se četiri nepoznanice (u_1, u_2, w i θ) u sljedeće četiri jednadžbe:

$$E_1 A_1 u_1'' - p_t = 0 \quad (19)$$

$$E_1 A_2 u_2'' + p_t = 0 \quad (20)$$

$$q_0 + GA_{s0} (w'' - \theta') = 0, \quad (21)$$

$$-EI_0 \theta'' - GA_{s0} (w' - \theta) + h_0 p_t = 0. \quad (22)$$

Uvođenjem modula klizanja K_t povezujemo klizanje Δu s tangencijalnim naprezanjima na kontaktu p_t preko linearnog zakona:

$$p_t = \Delta u K_t. \quad (23)$$

Kombiniranjem jednadžbi (19)-(23) dolazimo do diferencijalne jednadžbe za θ :

$$\theta^V - \delta_1 \theta''' + \delta_2 = 0, \quad (24)$$

gdje su koeficijenti δ_1 i δ_2 definirani kao:

$$\delta_1 = K_t \left(\frac{EA_0}{EA_p} + \frac{h_0^2}{EI_0} \right), \quad \delta_2 = \frac{K_t EA_0}{EI_0 EA_p} q_0. \quad (25)$$

Rješenje za $\theta(x)$ ima pet konstanti integracije. Uvrštavanjem tog rješenja u jednadžbe (19)-(23) dobivamo redom rješenja za $p_t(x)$, $\Delta u(x)$, $u_1(x)$, $w(x)$, uz još tri konstante integracije. To je ukupno osam konstanti integracije koje se za specifični problem određuju iz rubnih uvjeta.

3.4 Model ORR

U modelu ORR, klizanje je dozvoljeno, ali bez otpora, pa je $K_t = 0$ i $p_t = 0$. Prethodno rješenje za model CRR nije primjenjivo jer bi se pojavilo dijeljenje s nulom. Uz $p_t = 0$, sustav (19)-(22) možemo zapisati kao:

$$E_i A_i u_i'' = 0 \quad (26)$$

$$GA_{s0}(w'' - \theta') + q_0 = 0 \quad (27)$$

$$-EI_0 \theta'' - GA_{s0}(w' - \theta) = 0 \quad (28)$$

Kombinacijom jednadžbi (27) i (28) dobiva se:

$$-EI_0 \theta''' + q_0 = 0 \quad (29)$$

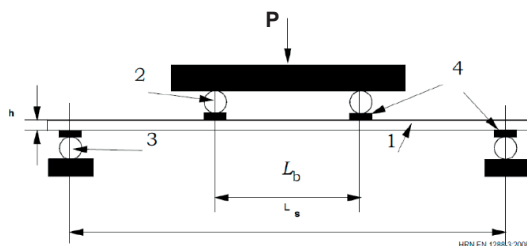
Rješenje za $\theta(x)$ dobiva se s tri konstante integracije, za $w(x)$ s jednom dodatnom konstantom integracije te za $u_1(x)$ i $u_2(x)$ uz četiri dodatne konstante integracije. Ukupno, model ORR ima osam konstanti integracije koje se određuju iz rubnih uvjeta.

3. Eksperimentalni rezultati

Lamelirano staklo često je izloženo kratkotrajnom opterećenju (<30 sekundi) okomitom na svoju ravninu. Deformacija je pod takvim uvjetima složena zbog nesklada modula elastičnosti između stakla i međusloja, ali i zbog svojstava međusloja koja ovise o temperaturi. U ovom radu korišteni su isključivo podaci iz eksperimenta provedenog od strane Huanga i suradnika [4], koji su analizirali dvije vrste međusloja: polivinil butiral (PVB) i Ionoplast SentryGlas® Plus. Ispitivanja su provedena na šest temperatura (25 °C, 40 °C, 50 °C, 60 °C, 70 °C i 80 °C) na uzorcima duljine $L_s = 1000$ mm, sastavljenim od dva sloja kaljenog stakla debljine 5 mm, s međuslojem debljine 0,76 mm. Youngov modul stakla iznosi $E = 70000$ N/mm², a Poissonov koeficijent je prema prednormi EN 16612 2013 [11] uzet kao $\nu = 0,22$. Istraživanje koristi shemu savijanja u četiri točke po normi EN 1288-3:2008, kao što je prikazano na Slici 4, pri čemu je $L_b = 200$ mm. Uzorci su podvrgnuti kratkotrajnim opterećenjima.

Kod potpunog sprezanja, lamelirano staklo ponaša se kao monolitno staklo i nema relativnog klizanja kada se progiba. U slučaju nespregnutog presjeka, pretpostavlja se da slojevi stakla djeluju nezavisno i mogu slobodno klizati jedan u odnosu na drugi. Kod djelomičnog sprezanja, dolazi do klizanja i prijenosa posmičnih sila između slojeva. Eksperiment je pokazao da se PVB međusloj ponaša kao djelomično spregnuti presjek u

rasponu 25 – 80 °C. Ionoplast pokazuje gotovo potpuno sprezanje na nižim temperaturama, a djelomično sprezanje iznad 50 °C.



Slika 4. Eksperiment savijanja u četiri točke prema normi EN 1288-3:2008 [5]

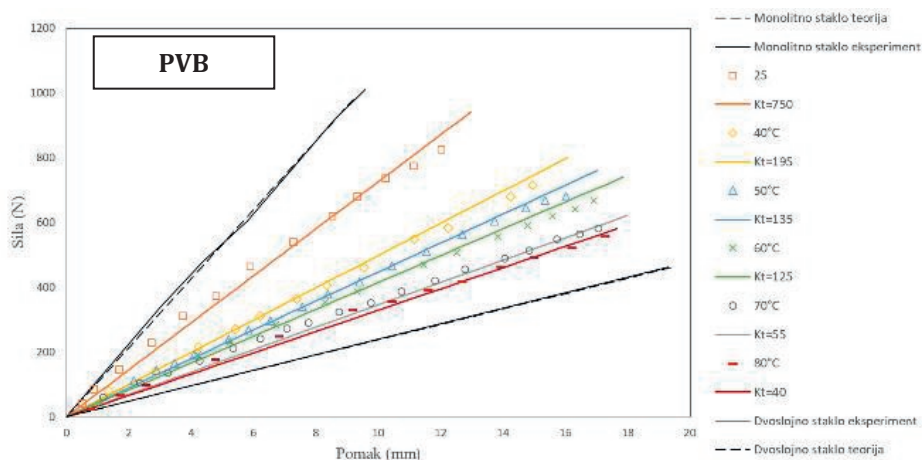
Eksperimentalni rezultati koji prikazuju ovisnost sile P o progibu na sredini nosača dani su na Slikama 5 i 6. Možemo primijetiti da krivulje na grafovima pokazuju približno linearne karakteristike na svim temperaturnim razinama, što upućuje na to da se s dovoljnom točnošću može pretpostaviti da je ponašanje stakla i međusloja linearno elastično. Progibi u ovom eksperimentu iznose otprilike 1 – 2 % u odnosu na duljinu raspona, što ulazi u domenu u kojoj je geometrijski linearna teorija dovoljno točna. Rezultati jasno pokazuju kako se progib PVB i Ionoplast lameliranog stakla povećava se s porastom temperature. Teoretske granice za monolitno i dvoslojno staklo mogu se dobiti korištenjem modela RRR i ORR, slijedom, ili analitičkim izrazima izvedenim po Euler-Bernoullijevoj grednoj teoriji (detalji dani u [12]). Može se uočiti kako za lamelirano staklo s Ionoplastom efektivna krutost u temperaturnim rasponima od 25 °C do 40 °C premašuje onu za monolitno staklo. Razlog tome jest to što je u ovom eksperimentu prosječna debljina lameliranog Ionoplast stakla 10,1 mm, a monolitnog stakla 9,8 mm. Prisutnost Ionoplast međusloja povećava visinu presjeka i posljedično rezultira većom efektivnom krutošću.

4. Kalibracija modela

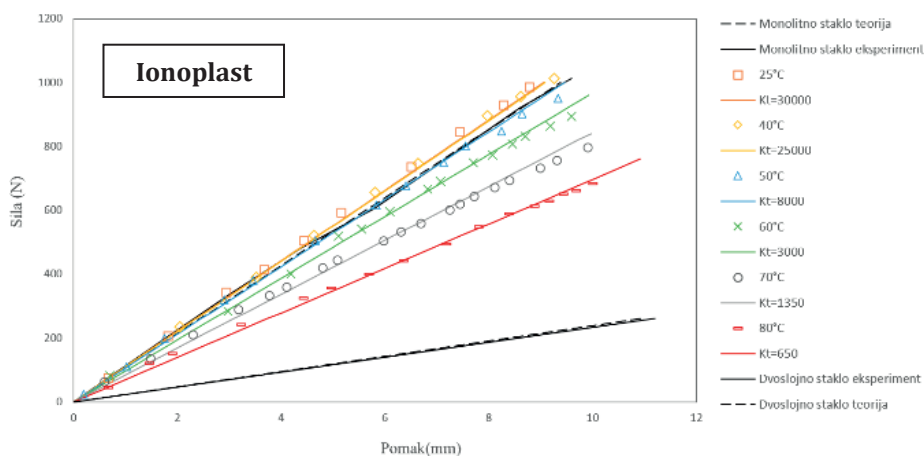
U softveru *Wolfram Mathematica* modelirana je polovica uzorka (zbog simetrije), podijeljena na dva segmenta: segment a (od lijevog oslonca to koncentrirane sile F , koja predstavlja polovicu ukupnog opterećenja na gred: $F = P/2$) i segment b (od koncentrirane sile do sredine nosača). Rubni uvjeti na krajevima uzorka i veza između segmenata (uvjeti kontinuiteta) detaljno su opisani u [12]. Kod modela CRR i ORR imamo ukupno 16 konstanti integracije, a kod modela RRR 12.

Na temelju prikazanih eksperimentalnih rezultata određene su odgovarajuće krutosti međusloja K_t u analitičkom modelu CRR za određenu temperaturu, preko kojeg se također može ocijeniti razina

sprezanja lameliranog stakla. Cilj je bio pronaći vrijednost K_t za koju je podudaranje rezultata eksperimenta i modela pri određenoj temperaturi najbolje. Uočeno je da za PVB K_t značajno pada s porastom temperature, dok je za Ionoplast K_t znatno viši i opada brže nakon 50 °C (Slika 5 i 6). Uz to je potvrđeno da rezultati modela RRR i ORR dobro opisuju ponašanje monolitnog i dvojslojnog stakla, slijedom. Za daljnju analizu uzete su vrijednosti K_t određene na temelju progiba za PVB međusloj (Tablica 1).



Slika 5. Usporedba rezultata sila-pomak modela i eksperimenta za PVB međusloj



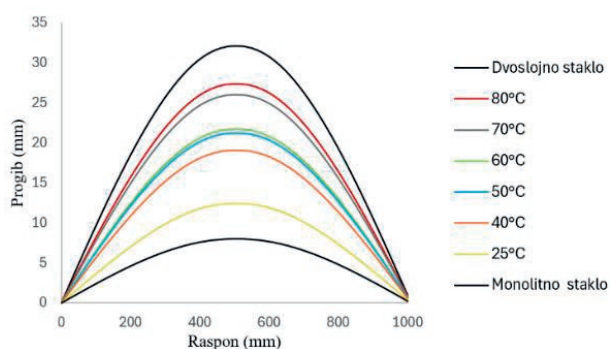
Slika 6. Usporedba rezultata sila-pomak modela i eksperimenta za Ionoplast međusloj

Tablica 1. Određene vrijednosti krutosti K_t pri različitim temperaturama

Temperatura	K_t (N/mm ³)	
	PVB	Ionoplast
25 °C	750	30000
40 °C	195	25000
50 °C	135	8000
60 °C	125	3000
70 °C	55	1350
80 °C	40	650

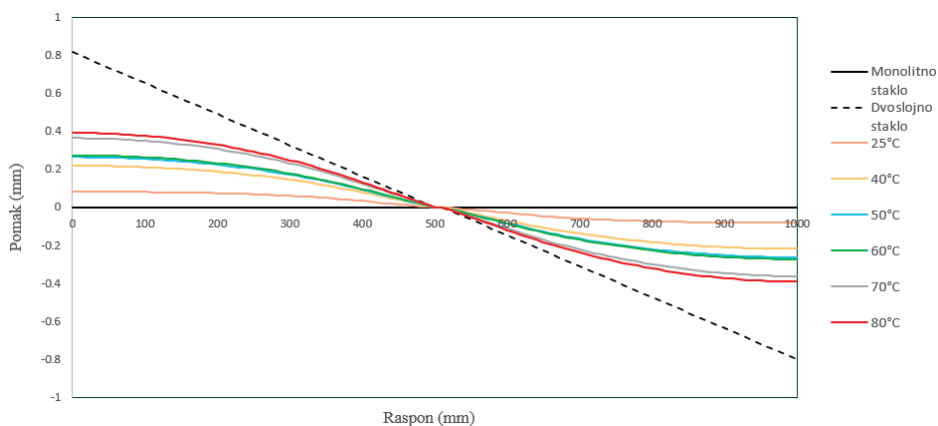
5. Numeričke analize

U nastavku rada prikazana je usporedba progiba staklenih panela pri različitim temperaturama, koristeći se analitičkim rješenjima i prethodno određenim vrijednostima modula klizanja K_t za različite temperature. Analiziran je slučaj jednolike promjene temperature u oba sloja. Za promatrani slučaj, koji je statički određeni sustav, takva promjena temperature uzrokuje samo uzdužno deformiranje slojeva. Međutim, za svaku temperaturu korištene su odgovarajuće vrijednosti krutosti K_t , čime se simulirao gubitak sprežavanja zbog povećanja temperature. Kako je bilo i očekivano, rezultati su pokazali da se povećanjem temperature povećava i progib stakla (Slika 7), zato što se povećanjem temperature smanjuje krutost međusloja, a time i krutost spregnutog nosača koji se stoga lakše savija pod opterećenjem. U simulacijama je korišteno $F = 450$ N, što predstavlja otprilike polovinu najvećeg opterećenja P primijenjenog tijekom eksperimenata [5].

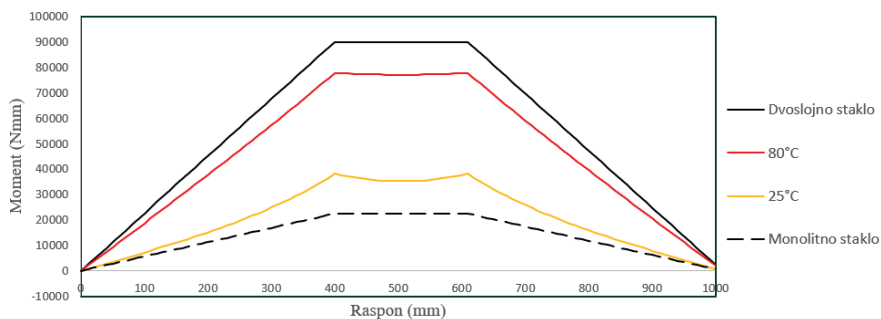
**Slika 7.** Usporedba progibnih linija dobivenih analitičkim rješenjem za razne temperature i granične slučajeve

Analiza rezultata klizanja pokazala je da je Δu između slojeva pri svim ispitanim temperaturama relativno malo, gotovo zanemarivo, što ukazuje na to da je vezni sloj efikasan (Slika 8). Povećanjem temperature smanjuju

se uzdužne sile u slojevima jer kontaktna naprezanja popuštaju te dolazi do većeg stupnja klizanja između slojeva i približavanja ponašanju kakvog imamo kod dvoslojnog stakla. Snižavanjem temperature pak dolazi do povećanja krutosti međusloja, čime se povećavaju uzdužne sile u slojevima i ponašanje se približava onom kakvog imamo kod monolitnog stakla. Poprečna sila u slojevima ostaje konstantna neovisno o temperaturi jer uvjeti na međusloju utječu samo na promjenu uzdužnih sila i momenata. Poprečna sile se za sva stakla uravnotežuju sa zadanim vanjskim opterećenjem ($F = 450\text{N}$) te, zbog toga što su jednake krutosti, svaki sloj preuzima pola ukupne poprečne sile. Moment savijanja u sloju, osim o poprečnim silama, ovisi i o uzdužnim silama. Kako ukupni moment mora biti uvijek isti (bez obzira uvjete na međusloju), povećanje uzdužnih sila u slojevima zbog boljeg sprežanja dovodi do smanjenja momenata savijanja u svakom sloju. Manji momenti u slojevima znače manje progibe. Na Slici 9 prikazani su momentni dijagrami sloja 1 za različite temperature, pri čemu su rezultati identični i za sloj 2.

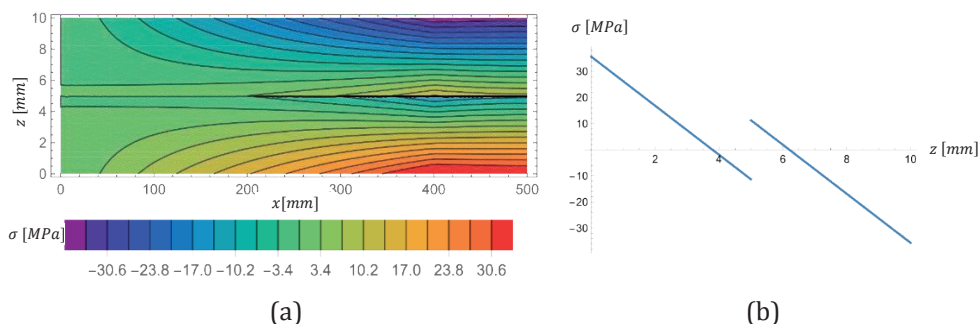


Slika 8. Usporedba klizanja između slojeva pri različitim temperaturama

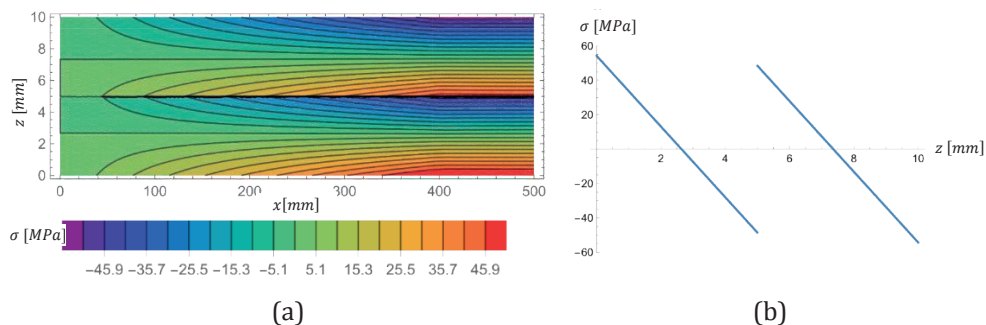


Slika 9: Momentni dijagram sloja 1 za različite razine sprežanja

Dodatno je analizirana raspodjela naprezanja za lamelirano staklo pri 25 °C i 80 °C. Kod 25 °C je ponašanje slično kao kod monolitnog stakla, s relativno malim naprezanjima na kontaktnom sloju i nešto većim naprezanjima na rubovima u odnosu na monolitno staklo (Slika 10). Kod 80 °C vidi se povećanje naprezanja u međusloju i na rubovima te se ponašanje približava dvoslojnom staklu (Slika 11). Uočljivo je povećanje naprezanja od lijevog ruba nosača prema sredini, ali i nepromjenjivost profila naprezanja u zoni čistog savijanja (od 400 do 500 mm). Maksimalna naprezanja u tlaku i vlaku za čitavi nosač pri 25 °C iznose 36 MPa, a pri 80 °C 55 MPa. Dodatne analize pri nejednolikoj promjeni temperature dane su u [12].



Slika 10. Raspodjela naprezanja u zoni čistog savijanja kod jednolike temperature za 25 °C (a) lijeva polovica nosača i (b) kritični poprečni presjek



Slika 11. Raspodjela naprezanja kod u zoni čistog savijanja jednolike temperature za 80 °C (a) lijeva polovica nosača i (b) kritični poprečni presjek

6. Zaključak

U radu je istražen utjecaj toplinskih učinaka na ponašanje lameliranog stakla uz usporedbu s monolitnim staklom i dvoslojnim staklom. Izvedeno je analitičko rješenje koje je primjenjivo za različite tipove spregnutih

nosača, pri čemu se materijalne i geometrijske osobine svakog sloja mogu zadavati neovisno. Analizom eksperimentalnih rezultata pokazano je da povećanje temperature uzrokuje postupno popuštanje međusloja u lameliranom staklu. Kada se eksperimentalno utvrdi ovisnost krutosti međusloja o temperaturi, iz modela je moguće odrediti raspodjelu unutrašnjih sila i normalnih naprezanja u svakom sloju, deformacije sustava, relativno klizanje na kontaktu te kontaktna naprezanja. U model se može zadavati jednolika i nejednolika promjena temperature po visini svakog sloja, što je posebno relevantno kod analiza lameliranog stakla pri različitim temperaturama interijera i eksterijera te analiza pri povišenim temperaturama. Razvijeni analitički model može se primijeniti i kod statički neodređenih nosača koji su posebno osjetljivi na toplinske deformacije.

Literatura

- [1] Bulić, M. (2023) Osnove spregnutih konstrukcija. Predavanja. Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet.
- [2] Buljan, N. (2024) Lagane konstrukcije. Predavanja. Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet.
- [3] Bittner, T., Tej, P., Bouška, P., Špaček, M. i Vokáč, M. (2014) Deformation Properties of Laminated Glass Subjected to Increased Temperature. *Applied Mechanics and Materials*, 486, str. 66–71.
- [4] Antolinc, D. (2020) Three-Point Bending Test of Laminated Glass With PVB and EVA Interlayers at Elevated Temperature. U: *Challenging Glass 7: Conference on Architectural and Structural Applications of Glass*, ur. Belis, Bos & Louter, Ghent University, str. 1–12.
- [5] Huang, X., Liu, G., Liu, Q. i Bennison, S. J. (2014) The Flexural Performance of Laminated Glass Beams under Elevated Temperature. *Structural Engineering and Mechanics*, 52(3), str. 603-612.
- [6] Galuppi, L., Royer-Carfagni, G. (2012) Effective Thickness of Laminated Glass Beams: New Expression via a Variational Approach, *Engineering Structures*, 38, str. 53-67.
- [7] Galuppi, L., Royer-Carfagni, G. (2013) The Effective Thickness of Laminated Glass: Inconsistency of the Formulation in a Proposal of EN-Standards, *Composites Part B: Engineering*, 55, str. 109-118.
- [8] Galuppi, L., Royer-Carfagni, G. (2014) Enhanced Effective Thickness of Multi-Layered Laminated Glass, *Composites Part B: Engineering*, 64, str. 202-213.
- [9] Feldmann, M., Kaspar, R., Abeln, B., Gessler, A., Langosch, K., Beyer, J., Schneider, J., Schula, S., Siebert, G., Haese, A., Wellershoff, F., Cruz, P., Belis, J., Colvin, J., Morgan, T., Ensslen, F., Eliasova, M., Šulcová, Z., Royer-Carfagni, G., Galuppi, L., Grenier, C., Hoegner, H., Kruijs, R., Louter, C., Manara, G., Neugebauer, J., Rajcic, V., Zarnic, R. (2014) Guidance for European Structural

Design of Glass Components. EUR 26439. Luksemburg. Publications Office of the European Union. JRC86637

- [10] Siciliano, A.F., Škec, L., Jelenić, G. (2021) Closed-Form Solutions for Modelling the Rotational Stiffness of Continuous and Discontinuous Compliant Interfaces in Two-Layer Timoshenko Beams. *Acta Mechanica*, 232, str. 2793-2824.
- [11] Prednorma prEN 16612 (2013) CEN, Glass in building – Determination of the Strength of Glass Panes – Experimental Evaluation and Design of Safety Factors, Brussels: European Committee for Standardization.
- [12] Veljačić, V. (2024) Analitičko rješenje za dvoslojnu kompozitnu gredu s popustljivim veznim slojem primijenjeno u analizi termalnih efekata kod lameliranog stakla. Diplomski rad. Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet.

ANALIZA INFRASTRUKTURE GRADA OPATIJE U FUNKCIJI TURIZMA

ANALYSIS OF THE INFRASTRUCTURE OF THE CITY OF OPATIJA FOR THE PURPOSE OF TOURISM

Iva Mrak*, Koraljka Bajčić**, Denis Ambruš*

Sažetak

U radu se istražuje ključna uloga građevinske infrastrukture u razvoju turizma na primjeru Grada Opatije. Kroz analizu geografskog položaja, urbanističkih čimbenika, turističkih resursa i manifestacija te povijesnog turizma, istraživanje se fokusira na važnost infrastrukturnih projekata za atraktivnost i konkurentnost destinacije. Analizirajući hotelski smještaj, projekte u izgradnji, prostorne planove te važnost turističke infrastrukture, istraživanje pruža uvid u načine na koje Opatija koristi svoje građevinske resurse kako bi zadovoljila potrebe turista tijekom cijele godine. Naglasak je na održavanju ravnoteže između očuvanja kulturne baštine i prilagodbe suvremenim trendovima. Analiza pokazuje važnost stalnog ulaganja u razvoj i održavanje građevinske infrastrukture kako bi turistički grad, Opatija, zadržala svoj status atraktivne turističke destinacije te potaknula gospodarski razvoj lokalne zajednice. Rad pruža temelj za daljnje istraživanje o utjecaju građevinske infrastrukture na turizam te sugerira potrebu za kontinuiranim praćenjem i prilagodbom urbanističkih planova i projekata kako bi se osigurala održivost i konkurentnost destinacije.

Ključne riječi: građevinska infrastruktura, turizam, turistički resursi, Opatija

Abstract

This study examines the pivotal role of construction infrastructure in the development of tourism, using the City of Opatija as a case study. Through an analysis of geographic location, urban planning factors, tourist assets and events, as well as historical tourism, the research focuses on the importance of infrastructure projects for a destination's attractiveness and competitiveness. By analyzing hotel accommodation, projects under construction, spatial planning and the significance of tourist infrastructure, the study provides insight into how Opatija leverages its construction assets to meet tourist demands year-round. Emphasis is placed on

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: {iva.mrak, denis.ambrus}@gradri.uniri.hr

** Komunalno društvo Vodovod i kanalizacija d.o.o. Rijeka

E-mail: koraljka.kate@gmail.com

maintaining a balance between preserving cultural heritage and adapting to contemporary trends. The analysis demonstrates the importance of continuous investment in both developing and maintaining construction infrastructure so that the tourist city of Opatija retains its status as an attractive tourist destination and stimulates the local community's economic development. The paper lays the groundwork for further research on the impact of construction infrastructure on tourism and suggests a need for ongoing monitoring and adjustment of urban planning and projects to ensure the destination's sustainability and competitiveness.

Key words: built infrastructure, tourism, tourist resources, Opatija

1. Uvod

Ovaj rad na primjeru Grada Opatije istražuje koju ulogu zauzima infrastruktura u razvoju turizma. Ova infrastruktura ne samo da služi turistima već i lokalnom stanovništvu, često čineći razliku između opće i turističke infrastrukture teško uočljivom. Rad je izrađen prema diplomskom radu [1].

U kontekstu održivog razvoja turizma, turistička infrastruktura igra ključnu ulogu jer omogućava turistički razvoj uz smanjenje negativnih utjecaja na okoliš i lokalnu zajednicu. Ova infrastruktura obuhvaća širok spektar objekata i usluga namijenjenih zadovoljenju potreba lokalnog stanovništva i turista. Ona igra ključnu ulogu u promociji turizma i povećanju konkurencije. Ulaganjem u dobro planiranu i odgovorno održavanu infrastrukturu unaprjeđuje se turistička industrija koja poštuje i sadašnju i buduću dobrobit turista, ali i životne sredine. [2]

Kroz pregled turističke infrastrukture, kroz povijesni pregled, postojeće stanje i planove, u radu će se istražiti infrastruktura i njen doprinos turističkoj ponudi grada.

2. Grad Opatija

2.1 Opće karakteristike i povijesni razvoj

Grad Opatija nalazi se u Primorsko – goranskoj županiji i smješten je na sjeverozapadnoj strani Kvarnerskog zaljeva, u podnožju planine Učka. Prostor Grada Opatije ima površinu od 80,92 km², od čega 67,20 km² pripada kopnenoj površini, a 13,72 km² morskoj površini. U okolici Grada Opatije nalazi se nekoliko naselja kao što su Ičići, Ika, Oprić, Pobri, Poljane, Vela Učka i Veprinac.

Grad Opatija ima izuzetno bogatu povijest koja seže u 19. st., kada je postala omiljeno odredište europske aristokracije. Posjećivali su je najpoznatiji europski vladari i plemićke obitelji privučeni blagom klimom i ljekovitim svojstvima mora, na početku posebno u zimskom periodu, a kasnije i u drugim godišnjim dobima.

Opatija se ističe prekrasnim parkovima i vrtovima, a popularna šetnica Lungomare pruža posjetiteljima priliku za uživanje u prirodnim ljepotama uz more. Uz to, Opatija nudi kulturne atrakcije – muzeje, koncertne dvorane, festivale, koncerte, izložbe. Za ljubitelje aktivnog odmora, u ponudi su različite sportske mogućnosti, poput tenisa i vodenih sportova. Blizina planine Učka pruža mogućnost brdskog biciklizma i planinarenja. Kombinacija ponude smješta Opatiju među prestižna turistička odredišta na Jadranskoj obali. Zbog svoje ugodne mediteranske klime zamišljena je kao destinacija za wellness i zdravstveni turizam. [3]

Povijest Opatije povezana je s benediktinskim samostanom po kojem je grad dobio ime. S obzirom na to da se ne može točno odrediti vrijeme izgradnje, poznato je da je samostan sve do 1552. god. bio u vlasništvu Kastavske gospoštije, da bi prema nalogu Ferdinanda I. Habsburškog pravo upravljanja samostanom dobio senjski biskup. Izgradnjom ceste prema Rijeci 1843. god. i nedugo nakon toga, željeznice, nastaje Opatija kao suvremeno naselje. [4]

Turizam u Opatiji počinje 1844. god. kada je Riječki patricij Ignacio Scarpa sagradio u Opatiji ljetnikovac – Villa Angiolina (Slika 1) [5], koju je nazvao po svojoj supruzi. Upravo se ova intervencija u prostoru smatra početkom organiziranog turizma u Opatiji. Okružena je arboretumom koji je zaštićen kao hortikulturna baština. Danas je Villa Angiolina dom Hrvatskog muzeja turizma.



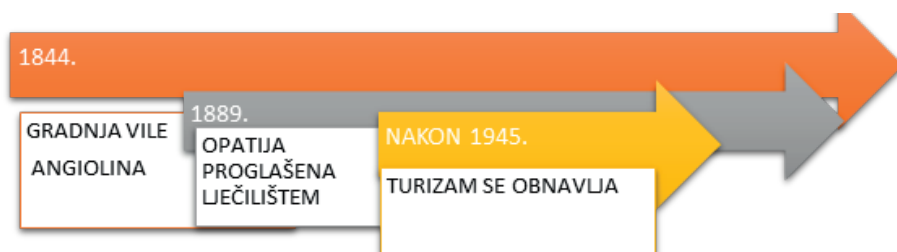
Slika 1. Villa Angiolina [1]

Turistički procvat grada očituje se u gradnji hotela, kupališta, lječilišta, kupališta s kabinama za presvlačenje te gradnji zaštitnog znaka Opatije – šetalištu Lungomare, svih izgrađenih do I sv. rata. Grad okuplja ugledne goste, a car Franjo Josip I. bio je najpoznatiji gost tadašnjeg vremena. Do 1933. god. u Opatiji je prometovao i tramvaj.

Razvoj hotela u Opatiji odvijao se kroz nekoliko faza Belle Époque (na prijelomu 19. i 20 st.). To je razdoblje kojeg karakteriziraju ekonomski rast i kulturni procvat. Izgrađeni su luksuzni i tehnološki napredni hoteli kao što su Grand Hotel Kvarner, Hotel Imperial, Hotel Bellevue, Hotel Agava. Nakon izgradnje prvih hotela, počele su se grditi i prve vile namijenjene uglednim gostima. Prva takva je bila Villa Amalia, sagrađena 1890. god. u blizini Hotela Kvarner.

Period nakon II. sv. rata Opatija je prošla kroz obnovu, počelo se ciljati na tržište srednjeg i nižeg građanskog sloja. Neki od najpoznatiji tada sagrađenih hotela su Ambassador, Adriatic i Admiral. Tijekom 90-ih turizam je stagnirao. No, i tada se dešavaju značajne investicije, kao hotel Millenium, kasnije preimenovan u Milenij.

2004. god. obilježena je 160. godišnjica turizma u Opatiji, kada su otvoreni i ekskluzivni hoteli poput hotela Wisteria, Melia, Camelia i Magnolia, koji zajedno čine Grand Hotel 4 opatijska cvijeta. Zatim je otvoren hotel Savoy, predstavljajući time značajan korak prema obnovi i diverzifikaciji turističke ponude u Opatiji.



Slika 2 Prikaz najvažnih godina za turizam Opatije [1]

2.2 Prometna infrastruktura

Turistima koji dolaze iz okolnih zemalja je cestovna povezanost Opatije prednost, a blizina zračnih luka Pula (100 km), Omišalj (40 km) i Trst (100 km) dovodi na ovo područje i turiste iz udaljenijih područja. Blizina turističke destinacije omogućuje lakšu odluku kod njenog odabira te potiče na češća putovanja.

Ljetnikovac Villa Angiolina napravljen je nakon proboja priobalne ceste Rijeka – Volosko. Nakon izgradnje željezničke pruge Rijeka – Pivka – Ljubljana započela je izgradnja prvog hotela – Hotela Kvarner.

U prošlosti, Opatija je imala i linijski putnički prijevoz morem prema Veneciji i Anconi. Brodska linija prema Anconi bila je značajna jer se na nju nadovezala linija putničkog vlaka prema Rimu.

Sagledavši svekoliku ulogu prometa u ovoj turističkoj destinaciji može se kauzalno vidjeti kako različiti prometni tokovi međusobno djeluju, i to za potrebe lokalnog stanovništva, opskrbe, u svrhu turizma, prijevoza robe te prijevoza prema većem gradskom središtu. Grad Opatija je danas s okolicom povezan s nekoliko značajnih prometnica, a to su Jadranska magistrala (D8) i autocesta (A1) koja povezuje Rijeku s unutrašnjosti Hrvatske, čime se olakšava pristup Opatiji i okolici.

Prometna povezanost Opatije utječe na to da na Kvarner pristižu uglavnom obiteljski gosti, koji dolaze automobilima. Negativna posljedica takvog dolaska je veliki broj automobila tijekom sezone koji opterećuju

prometnu mrežu jer zbog nedovoljnog kapaciteta propusnosti dolazi do prometnih gužvi i zastoja.

Drugi oblik povezanosti Opatije je autobusnim linijama. Opatija ima autobusnu stanicu koja se nalazi u samom središtu grada. S autobusne stanice u Opatiji autobusi svakodnevno prometuju prema Istri, otocima, Zagrebu, inozemstvu. Sa stanice prometuje međugradska linija prema Rijeci te okolnim mjestima Liburnije.

Opatija ima javna parkirališta na kojima se vrši naplata parkinga prema vremenu naplate (cjelogodišnja, polugodišnja i sezonska). Sva parkirališta su smještena u blizini centra grada od kojeg su udaljena ne više od 5 – 10 minuta hoda.

U budućem razvoju Opatije potrebno je sagledati mogućnosti proširenja postojeće cestovne infrastrukture koja će rasteretiti postojeću mrežu, osobito u ljetnim mjesecima, a svakako bi bilo poželjno modernizirati i željeznički i pomorski promet.

2.3 Građevinska infrastruktura

Smještaj naselja uz morsku obalu su, uz klimu i vegetaciju, ključni faktori za razvoj turizma ovog područja. Vegetaciju karakteriziraju čempres, bor, hrast i crnika. Kulturni turizam vrlo je izražen na području Opatije, od posjećenosti povijesnim građevinama, do modernih manifestacija koje privlače kako domaće tako i strane turiste.

Opatija je poznata po svojim perivojima i prekrasno uređenim šarenim parkovima. Posjeduje deset javnih gradskih perivoja, od kojih su Park Angiolina i Park Margarita te perivoj Vile Rosalie zaštićeni. Kraj Vile Angioline smješten je glazbeni paviljon sa skulpturom Jana Kubelika, češkog kompozitora i violinista, koji je u Opatiji boravio u 20. st. U blizini vile nalazi se i spomenik Ivanu Matetiću Ronjgovu, a na sjevernoj strani parka je spomen obilježje Friedrichu Juliusu Schuleru, ravnatelju Društva južnih željeznica, koji je zaslužan za razvoj Opatije.

Obalna šetnica Franza Josepha I., Lungomare, povijesna šetnica nastala u periodu od 1888. do 1911. god., svojom duljinom od gotovo deset kilometara povezuje Volosko i Lovran. Šetnicu je moguće koristiti za hodaње, trčanje, biciklizam, komunikaciju između plaže i hotela, a prolazi uz secesijske vile te simbole Opatije poput npr. Djevojke s galebom, kao i mjesta koja podsjećaju na nekadašnji život stanovništva (izvor u Dražici) i šljunčane plaže.

Današnje Kupalište Angiolina je potpuno nova zgrada nastala na mjestu starog kupališta koje je uništeno u požaru 1989. god. Kako bi se povukla

paralela s izvornom zgradom, zadržana je upotreba drva čija prozračna drvena konstrukcija impresionira već na prvi pogled. [4,7]



Slika 3. Kupalište Angiolina [1]

Obnovom kupališta Lido [8] izgrađenog u 19. st., odnosno njegovom modernizacijom, uređuje se parter, hortikultura i postavlja urbana oprema, dok je prizemlje paviljona rezervirano za garderobe, sunčalište i sanitarije. Na katu su smještene saune, fitness, wellness i kabine za odmor. Krovna terasa prati liniju terena i rezervirana je za sunčalište, a na drugom dijelu kupališta izgrađeno je veliko sunčalište, bazen te ugostiteljski objekt na površini od oko 1500 m².

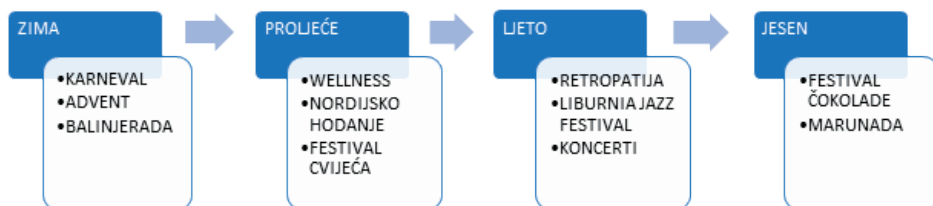
Infrastruktura zdravstvenog turizma razvija se od samog početka turizma u Opatiji – Opatija dobiva status Carskog zimskog lječilišta 4. ožujka 1889. god. Boravak u Opatiji obuhvaćao je različite grane medicine i društvenog života, što se vidi iz prvih opatijskih hotela. Nakon II sv. rata, osnivanje Thalassoterapije pokazalo se ključno u daljnjem razvoju zdravstvenog turizma. Utemeljena je 1957. god. kao Institut, da bi se kasnije preimenovala u Zavod te danas djeluje kao Specijalna bolnica za rehabilitaciju bolesti srca, pluća i reumatizma. I danas u mjesecu ožujku brojni wellness centri posjetiteljima otvaraju svoja vrata i predstavljaju svoju bogatu ponudu. Projekt Opatija – oaza zdravlja i wellnessa je projekt Turističke zajednice Opatije namijenjen promociji zdravijeg i aktivnijeg

načina života u okviru kojeg se održavaju promocije usmjerene na zdravlje. Osim navedenog, turisti posjet koriste za razne medicinske usluge poput estetske kirurgije, za stomatološke zahvate i dijagnostiku.

Kongresni i poslovni turizam značajno produžuje turističku sezonu te pridonosi razvoju turističke destinacije [9]. Ova vrsta turizma također pruža priliku za upoznavanje s lokalnom kulturom, gastronomijom i atrakcijama [10]. U Opatiji se održava veliki broj nacionalnih skupova i kongresa. Prema podacima Kongresnog i poticajnog ureda grada Opatije, dostupno je oko 50 dvorana smještenih u hotele ukupnog kapaciteta oko 6400 mjesta te sedam dvorana namijenjenih manjim poslovnim skupovima, smještenih u različitim sportskim dvoranama, vilama i centrima.

Kulturni turizam je značajni dio ponude, kroz posjet izgrađenoj baštini, promociju kulturne baštine i organizaciju kulturnih događaja [11]. Ljetna pozornica je jedno od najpoznatijih kulturnih mjesta u Opatiji. Smještena uz obalu, pozornica predstavlja centralni prostor za održavanje kulturnih događaja tijekom ljetnih mjeseci, a posjećuju je posjetitelji iz različitih dijelova svijeta. Pozornica je opremljena suvremenom tonskom i svjetlosnom opremom. Velika pozornica ima kapacitet od 2500 sjedećih mjesta i 5000 stajaćih. Scena je dimenzija 21x12 metara te je svojom veličinom idealna za održavanje glazbenih koncerata, opereta, baleta. Mala ljetna pozornica ima kapacitet 600 sjedećih mjesta te scenu veličine 10x10 metara.

Turistička zajednica razvila je niz projekata kako bi privukla što više posjetitelja. Zima je obilježena Adventom i karnevalom. Proljeće je rezervirano za gastronomiju i wellness i spa programe te povijesne kulturne spektakle „Srednjovjekovni Veprinac“ i proslave Markove [12]. Ljeti se održavaju brojni koncerti na Ljetnoj pozornici i manifestacija Liburnia Jazz Festival. Tijekom cijele godine održavaju se razne turističke manifestacije kao što su projekt Feel & Taste, projekt Eno i gastro i RetrOpatija.

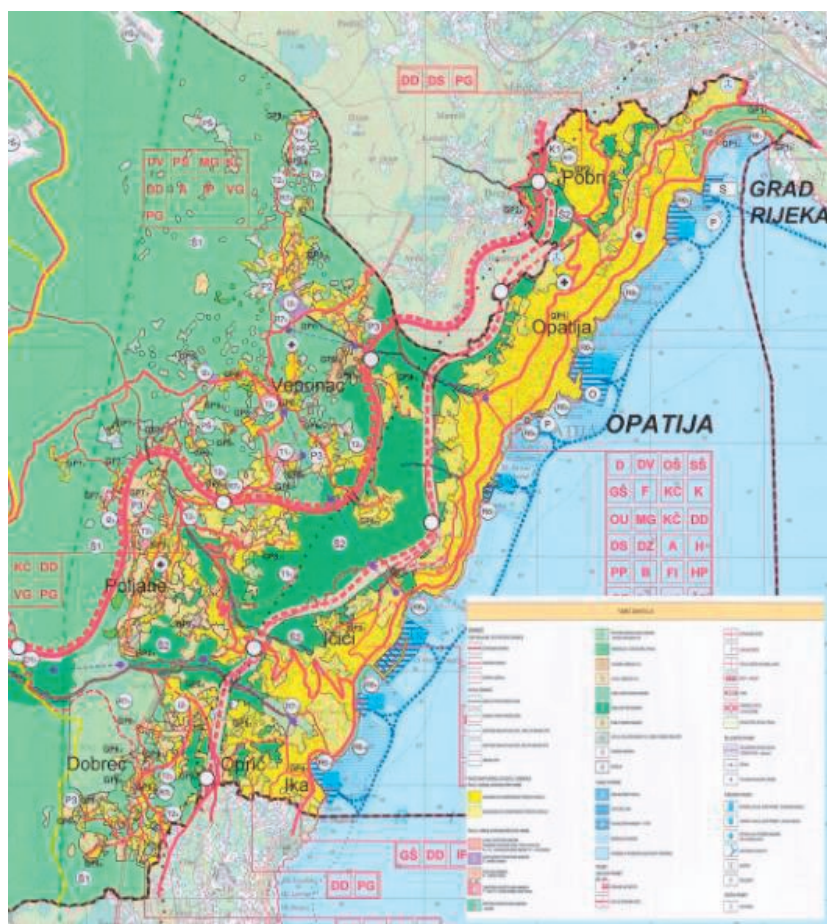


Slika 4. Opis turističkih manifestacija po godišnjim dobima [1]

2.4 Prostorno planska dokumentacija

Prostorni plan Primorsko-goranske županije temeljni je dokument županije koji daje smjernice za izradu planova nižeg reda. Donijela ga je Županijska skupština, koja određuje temeljne pravce prostornog razvoja jedne županije. Prostorni plan Primorsko-goranske županije, između ostaloga, i strateški usmjerava razvoj županije, utvrđuje namjenu i korištenje prostora te regulira sustav naselja, mrežu javnih ustanova i infrastrukturu [13].

U Gradu Opatija primjenjuju se odredbe niza prostornih i urbanističkih planova, dok koordinaciju izrade i praćenje provedbe prostornih planova vodi županijski Zavod za prostorno uređenje (Tablica 1).



Slika 5. Izvadak iz Prostornog plana uređenja Grada Opatije – Korištenje i namjena površina [14]

Tablica 1. Prikaz planova Grada Opatije (izradila Bajčić [1] prema registru prostornih planova [15])

R. br.	Vrsta	Naziv odluke i glasnik
1.	PPUG	Prostorni plan uređenja Grada Opatije - Odluka o donošenju izmjena i dopuna („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 01/07, 56/12, 08/16, 10/21, 05/22)
2.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja naselja Ičići - UPU naselja Ičići (UPU 2) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 01/09, 17/13, 08/16)
3.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja naselja Opatija (UPU 1) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 10/09, 05/22)
4.	UPU	Odluka o donošenju Izmjena i dopuna Urbanističkog plana uređenja naselja Opatija (UPU 1) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 56/12, 13/19, 10/21)
5.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja UPU 3 - Naselja Ika i Oprić (UPU3) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 12/11) Odluka o donošenju Izmjena i dopuna Urbanističkog plana uređenja naselja Ika - Oprić (UPU 3) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 17/18)
6.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja naselja Okoli Dujmić - Falalelići - Katinići (UPU14) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 37/11)
7.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja 13 - naselja Travičići (UPU 13) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 15/12)
8.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja 6 - naselja Pobri (uključivo namjene K1 i R7) (UPU 6) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 15/12)
9.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja - naselja Poljane - Menderi - Strmice - (UPU20) UPU naselja Poljane - Menderi - Strmice (UPU 20) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 28/12)
10.	UPU	Odluka o donošenju Urbanističkog plana uređenja 5 - naselja Dobreć (uključivo namjene T 2 i R 7) i naselja Krasa, Gržanići, Kružići, Antići, Kokići, Konjarići i Dražica UPU naselja Dobreć (uključivo namjene T2 i R7) i naselja Krasa, Gržanići, Kružići, Antići, Kokići, Konjarići i Dražica) (UPU 5) („Službene novine Primorsko-goranske županije“ broj 50/12)

Pojedini prostori doživjeli su tijekom vremena znatne izmjene i tako utjecali na ukupnu sliku grada. U prvome redu odnosi se to na uređenje Slatine [16]. Prostorno planska dokumentacija je ključna za izgradnju i održavanje infrastrukture, stambene, poslovne, turističko-ugostiteljske, prometne, ali i zelene, kao i korištenja mora i obale. U skladu s njihovim odredbama po kojima se vrši obnova i novogradnja, u novije vrijeme obnovljeni su brojni hoteli, izgrađeni novi, te predviđeni novi planirani hoteli, kao i uređenje centra Opatije – Slatine, za što je i proveden natječaj [17].

Hotel Ičići izgrađen je 2017. god. na mjestu nekadašnjeg hotela Ičići. Hotel nosi 4 zvjezdice, prostire se na pet katova s ukupno 180 soba. Hotel Imperijal 2018. god., nakon renovacije, postaje Remisens Premium Hotel Imperial. Renovacija hotela obuhvaćala je preuređenje soba, izgradnju wellness centra s unutarnjim bazenom i fitnessom. Hotel Ambassador obnovljen je 2017. god. s ciljem zadržavanja razine kategorizacije 5 zvjezdica, a dodana je i nova kongresna dvorana. Hotel Kvarner je obnovljen 2020. god., a dodan je i zatvoreni bazen. Hotel Admiral, jedini hotel s vlastitom marinom, također je obnovljen, a dodani su novi wellness centar i kongresni centar s četiri sale, od kojih 3 manje i 1 veća koja prima i do 50 ljudi. Hotel Istra je za obnovu dobio nagradu Hrvatske gospodarske komore Turistički cvijet. Hotel Keight, je prvi Curio Collection by Hilton u Hrvatskoj, otvoren je 2024. god, s 54 smještajne jedinice [18]. Planirana je gradnja novog hotela: Hotela Marriott Ičići, na čestici površine više od 18.000 m² s planiranih skoro 180 smještajnih jedinica [19].

3. Zaključak

U današnjem svijetu, turizam ima ključnu ulogu u ekonomijama mnogih zemalja, a turističke destinacije traže načine kako koristiti svoje prirodne i kulturne resurse kako bi privukle što više posjetitelja. U tom kontekstu, infrastruktura postaje ključni čimbenik koji omogućuje kreiranje atraktivnih turističkih destinacija.

Opatija se ističe kao primjer grada koji uspješno koristi svoju građevinsku infrastrukturu kako bi privukao turiste tijekom cijele godine. Opatija, poznata po svojim elegantnim hotelima, šetnicama uz more i bogatom poviješću, izgrađuje turistički identitet temeljen na svojoj infrastrukturi. Analiza glavnih turističkih resursa Opatije, poput prirodnih i antropogenih kulturno-povijesnih turističkih dobara koja se mogu gospodarski iskoristiti te turističkih manifestacija, otkriva važnost cjelokupne infrastrukture u stvaranju privlačne destinacije. Istraživački rezultati ukazuju i na dualnost morfogeneze građevinske infrastrukture. Prethodni povijesni identitetski arhitektonski ansambli kao faktori

turističke privlačnosti prije pojave masovne upotrebe automobila i oni drugi, realizirani nakon II. sv. rata pa sve do danas, svjedoče izraženoj dominaciji prostorne zauzetosti automobilima, kako unutar pojedinih parcela na otvorenim vrtnim površinama, tako i pretežno svih oblika javnih površina. Kako bi na zadovoljavajući način u budućnosti opstala referentna turistička ponuda, nužno se vratiti izvornosti turističkog proizvoda Opatije i umanjeњу pritiska masovne turističke ponude te programiranome rastu bogatoga stacionarnoga gosta, za što je Opatija izvorno planirana i bila izgrađena. Prethodno navedeno je ujedno i preporuka za buduće istraživačke poželjne interdisciplinarne smjerove. Opatija se kontinuirano prilagođava potrebama suvremenog turizma istovremeno njegujući svoju bogatu kulturnu baštinu i tradiciju, a ulaganje u razvoj i održavanje građevinske infrastrukture čini Opatiju snažnom turističkom destinacijom i pruža potencijal za daljnji rast.

Literatura

- [1] Bajčić, K. (2024) Građevinska infrastruktura u funkciji turizma – na primjeru Opatije, Građevinski fakultet, diplomski rad
- [2] Dr. D. Filipović, Dr. V. Šećerov & Dr. D. S. Đorđević (Ur.), Planska i normativna zaštita prostora i životne sredine. Asocijacija prostornih planera Srbije, Univerzitet u Beogradu - Geografski fakultet. (2023)
- [3] Opatija – Apartmani, <https://www.come-to-adria.dk>, pristup 4. 9. 2023.
- [4] Kostelić A. Povijest turizma u Opatiji [Završni rad]. Pula: Sveučilište Jurja Dobrile u Puli; 2017 [pristup 20. 9. 2023.] Dostupno na: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:137:404936>
- [5] Villa Angiolina, <https://www.come-to-adria.dk>, pristup 4. 9. 2023.
- [6] Ljetna pozornica, <https://www.festivalopatija.hr/ljetna-pozornica/>, pristup 1. 2. 2024.
- [7] Pogled u službeno otvoreno kupalište Angiolina, <https://www.journal.hr/lifestyle/opatisko-kupaliste-angiolina/>, pristup 11. 9. 2023.
- [8] Kupalište Lido, <https://www.dgarhitekti.hr/hr/projekti/plaza-lido-opatija>
- [9] Izmjene i dopune Glavnog plana razvoja turizma Primorsko-goranske županije, <http://www.kvarner.hr/>, pristup 15.9. 2023.
- [10] Pogačnik, Andrej/Posebne vrste turizma in njihovo prostorno načitovanje, Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2008.
- [11] Kulturi turizam, <http://aktivnitureizam.hr>, pristup 1. 2. 2024.
- [12] Izvješće o izvršenju godišnjeg programa rada TZ Grada Opatije za 2022. godinu, <https://www.visitopatija.com/>, pristup 20. 10. 2023.
- [13] Prostorni plan Primorsko-goranske županije, Službene novine Primorsko-goranske županije br. 32/13, 07/17, 41/18, 04/19 i 18/22

- [14] Prostorni plan uređenja Opatije, <https://arhiva.opatija.hr/hr/prostorni-planovi/prostorni-plan/index.html>, pristup 15. 10. 2023.
- [15] Javna ustanova, Zavod za prostorno uređenje Primorsko -goranske županije, Registra prostornih planova, https://zavod.pgz.hr/planovi_i_izvjesca/registar-prostornih-planova.ml, pristup 11. 7. 2023.
- [16] Vahtar – Jurković, K. (2004.) Opatija: urbanistički razvoj i perivojno nasljeđe. Glosa, Rijeka.
- [17] Opatija, <https://opatija.hr/rezultati-natjecaja-za-izradu-idejnog-urbanisticko-arhitektonskog-rijesenja-uredenja-trga-vladimira-gortana-s-podrucjem-kupalista-slatine-i-pancere-u-opatiji/>
- [18] Poslovni turizam, <https://www.poslovniturizam.com/mice-magazin/vijesti/opatija-marriott-resort-spa-sto-novi-hotelski-kompleks-donosi-opatijskoj-rivijeri/4521/>
- [19] Hilton, <https://www.hilton.com/en/hotels/zagopqq-keight-hotel-opatija/>

VIBRATION ANALYSIS OF A 2D MICROPOLAR CONTINUUM USING FINITE ELEMENTS WITH ENHANCED FIXED-POLE INTERPOLATION

VIBRACIJSKA ANALIZA 2D MIKROPOLARNOG KONTINUUMA METODOM KONAČNIH ELEMENATA S POBOLJŠANOM FIXED-POLE INTERPOLACIJOM

Laura Grbac*, Gordan Jelenić*

Abstract

In this paper, newly developed quadrilateral finite elements of arbitrary order are presented for the linear vibration analysis of a 2D micropolar continuum. For the displacement field interpolation, two types of interpolation functions based on the fixed-pole concept are considered: the original and the enhanced (linked) interpolation. The developed finite elements with 4 and 9 nodes were subsequently employed to discretise several geometrical domains. Their convergence curves for the first two natural frequencies of the selected numerical examples are critically assessed against the results obtained using standard Lagrange interpolation.

Key words: micropolar continuum, FEM, fixed-pole approach, vibrational analysis.

Sažetak

U ovom radu predstavljani su novorazvijeni četverokutni konačni elementi proizvoljnog reda za linearnu vibracijsku analizu 2D mikropolarnog kontinuuma, pri čemu se za interpolaciju polja pomaka razmatraju dvije vrste funkcija temeljenih na konceptu nepomičnog pola: originalna i poboljšana (vezana) interpolacija. Razvijeni elementi s 4 i 9 čvorova korišteni su za diskretizaciju nekoliko sustava. Njihove konvergencijske krivulje za prve 2 prirodne frekvencije odabranih primjera kritički se uspoređuju s rezultatima dobivenim Lagrangeovim elementima.

Ključne riječi: mikropolarni konitnum, MKE, fixed-pole koncept, vibracijska analiza.

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: {laura.grbac, gordan.jelenic}@gradri.uniri.hr

1. Introduction

The classical (Cauchy) theory of elasticity provides a sufficiently accurate description of the mechanical behaviour of homogeneous materials; however, numerous experimental studies have demonstrated that its simplified assumptions are inadequate for describing materials with a more pronounced (micro)structure such as e.g. foams [1]. By neglecting the influence of microstructure, the classical theory also fails to capture the so-called *size-effect*, a phenomenon observed in smaller specimens, which are stiffer than larger ones made of the same material under bending or torsion [2]. Further deviations from classical predictions have been noted in dynamic problems involving high frequencies and short wavelengths, where the microstructure affects the material response [3].

For these reasons, various generalised continuum theories have been developed, among which is the micropolar (Cosserat) theory of elasticity [4], considered in this paper. In this theory, an additional couple-stress vector occurs, resulting in generally non-symmetric stress and couple-stress tensors [4], [5], and thus there also exists an additional angular strain tensor (curvature), which is defined as the gradient of the microrotation – an additional kinematic field that describes the orientation of each material point and is completely independent of the skew-symmetric part of the displacement gradient (macrorotation) [6]. If we consider a linear-elastic, isotropic, centrosymmetric micropolar material, the relationship between the stress and couple-stress tensors on the one hand and the strain and curvature tensors on the other is described by two fourth-order constitutive tensors comprising six independent material parameters in total [7]. Reliable experimental identification methods are still lacking, which constrains broader application of the micropolar theory in engineering practice.

Therefore, the desired aim of this research is to develop and present new reliable finite elements based on micropolar theory, intended to serve both as a simulation tool directly applicable to engineering problems, and as a reliable modelling tool in virtual experimental setups to determine material parameters by inverse analysis. This contributes to the further advancement and practical implementation of Cosserat theory.

In order to develop a new displacement-based finite element for the linear analysis of a two-dimensional micropolar continuum, the application of the so-called *fixed-pole* interpolation is considered in this paper. The interpolation is inspired by the *fixed-pole* concept, which was first introduced by Bottasso and Borri in [8], where it was applied in the dynamic analysis of geometrically nonlinear 3D beams and proved to be highly effective. This approach reformulates the stress and couple-stress

resultants with respect to a unique fixed reference point, and introduces a unified kinematic field $\mathbf{p}$, combining displacements and rotations.

In [9], we investigated the application of fixed-pole interpolation in the analysis of the Timoshenko beam (which is, in fact, a 1D linear micropolar continuum), where it was shown that applying the linearised form of fixed-pole interpolation ultimately yields a stiffness matrix identical to that obtained using standard Lagrange interpolation. To improve the original fixed-pole interpolation, an extensive analysis and comparison with some standard and novel interpolations were carried out in [10]. This modification emerged directly from a comparison with the linked interpolation, which is known to provide exact solutions for the Timoshenko beam subjected to arbitrary polynomial loading with a sufficient finite number of nodal points [11]. In the vibration analysis of a Timoshenko beam, it has also been shown that the ordinary fixed-pole interpolation has a favourable effect [9].

Motivated by the beneficial properties of the enhanced fixed-pole interpolation observed in the static and vibrational analysis of the 3D micropolar continuum [10], as well as by the beneficial effects of its original formulation in the vibration analysis of the Timoshenko beam [9], this paper proceeds to analyse the application of both types of fixed-pole interpolation in vibration analysis of the planar micropolar continuum. In the 2D micropolar analysis, the family of linked interpolations has previously been applied only in static problems [12], while this study extends its use to vibration analysis through a set of several existing and new numerical examples.

2. Analytical model of a linear micropolar continuum

The governing equations, including the equations of motion, kinematic and constitutive equations, are briefly outlined in the following subsections (for more detail, see e.g. [6], [7], [12], [13]).

2.1 Equations of motion

The first set of equations of motion for the micropolar continuum can be derived by applying the law of conservation of linear momentum, where the divergence theorem is applied, while the second set can be analogously derived from the law of conservation of angular momentum. Using the Einstein convention on repetitive indices, the equations of motion of a micropolar (Cosserat) continuum in linear analysis, with density ρ and microinertia coefficient j which depends on the internal structure of material, in a rectangular spatial system with co-ordinates x_1, x_2 and x_3 can be therefore written as [3]

$$\sigma_{ij,j} + p_{vi} = \rho \ddot{u}_i, \quad \mu_{ij,j} - \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + m_{vi} = \rho j \ddot{\phi}_i, \quad (1)$$

where stress tensor σ and the couple stress-tensor μ are, in general, non-symmetric, and ε_{ijk} is the permutation tensor (Levi-Civita symbol) with $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ with all other components equal to zero. The Kronecker delta symbol δ_{ij} is defined as $\delta_{ij} = 1$, if $i = j$, otherwise $\delta_{ij} = 0$. The first index in σ and μ denotes the direction of a stress or couple-stress components, while the second index represents the direction of the surface normal, and the comma in $\sigma_{ij,j}$ and $\mu_{ij,j}$ denotes differentiation with respect to the spatial co-ordinate x_j . The displacement and microrotation are labelled as u_i and ϕ_i , respectively, and, when accompanied by a superimposed double dot ($\ddot{\cdot}$), they represent the second derivative with respect to time, i.e., acceleration. The terms p_{vi} and m_{vi} denote the distributed volume force and moment. Since the surface is massless, the natural boundary conditions remain the same as in the static analysis (derived in detail in [12]), and they are valid at any point of the surface with prescribed loading as

$$\sigma_{ij} n_j = p_{si} \quad \text{and} \quad \mu_{ij} n_j = m_{si} \quad (2)$$

where n_i are components of the outward unit normal to the considered surface loaded by force loading p_{si} or moment loading m_{si} . On the remaining part of the boundary, we assign the kinematic boundary conditions.

2.2 Kinematic equations in linear analysis

When the influence of the microstructure of the material is considered, the number of degrees of freedom increases. In the micropolar continuum theory, the difference between the initial and deformed state of the body is described not only by the displacement field $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, but also by the additional microrotation field $\boldsymbol{\phi}(x_1, x_2, x_3)$. The microrotation is completely independent of the displacement field as well as its derivatives [4]. The components of the non-symmetric micropolar strain tensor ϵ are related to those fields via

$$\epsilon_{ij} = u_{i,j} + \varepsilon_{ijk} \phi_k, \quad (3)$$

where we can observe that the normal micropolar strains are equal to those in the classical continuum theory, while the influence of the microrotation is present only in shear strains ϵ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Due to the existence of an independent microrotation field $\boldsymbol{\phi}$, there also exists a corresponding change of microrotation, i.e. a curvature (angular strain) tensor $\boldsymbol{\kappa}$, that is also non-symmetric, with components

$$\kappa_{ij} = \phi_{i,j}. \quad (4)$$

2.3 Constitutive equations

If we consider a linear elastic, isotropic, centrosymmetric micropolar material, the relations between the stresses and couple-stresses with the strains and curvatures are given by [7]

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \nu) \epsilon_{ij} + (\mu - \nu) \epsilon_{ji}, \quad (5)$$

$$\mu_{ij} = \alpha \kappa_{kk} \delta_{ij} + (\beta + \gamma) \kappa_{ij} + (\beta - \gamma) \kappa_{ji}, \quad (6)$$

where the Lamé elastic constants λ and μ are known from the classical theory, while ν , α , β and γ are additional micropolar parameters. To ensure the physical meaning and stability of the material model, the following limits on these values are [14]

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0, \quad 3\alpha + 2\beta > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0. \quad (7)$$

These elastic constants are related to a set of engineering parameters in the following way [15]

$$\lambda = \frac{2nG}{1-2n}, \quad \mu = G, \quad \nu = \frac{GN^2}{1-N^2}, \quad \alpha = \frac{2Gl_t^2(1-\Psi)}{\Psi}, \quad \beta = Gl_t^2, \quad \gamma = G(4l_b^2 - l_t^2), \quad (8)$$

where $G = \frac{E}{2(1+n)}$ is the shear modulus, $n \in \langle -1, 0.5 \rangle$ is Poisson's ratio, E is Young's modulus, all of which are well known from classical theory; $N \in \langle 0, 1 \rangle$ is a dimensionless coupling number, which is a measure of the degree of coupling between the microrotation and the macrorotation vector (skew-symmetric components of the displacement gradient) and parameter $\Psi \in \left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$ is a dimensionless polar ratio of rotational sensitivity that has a similar effect in torsion as Poisson's ratio has in axial deformation. The characteristic lengths for bending l_b and for torsion l_t are the parameters, which represent a measure of the respective stiffening due to the microstructure of the material, and they introduce the *size-effect* phenomenon into consideration [16]. The influence of the microstructure of the material on its macroscopic behaviour becomes relatively minor when the values of the characteristic lengths are sufficiently small compared to representative dimensions of the observed specimen.

2.4 Plane strain formulation

In the two-dimensional case there are only three degrees of freedom, i.e. two displacements $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ 0]^T$, and one in-plane (drilling), microrotation $\boldsymbol{\phi} = [0 \ 0 \ \phi_3]^T$. Hence, the kinematic equations in their matrix form are reduced as follows

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_u^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{I}_\phi} \phi_3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_u^T \mathbf{u} + \mathbf{I}_\phi \phi_3, \quad (9)$$

and

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}_\phi^T} \phi_3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}_\phi^T \phi_3 \quad (10)$$

In the plane strain state it is assumed that the strain components involving the x_3 direction are equal to zero, that is $\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$, while all curvature components associated with microrotations about the x_1 and x_2 axes, as well as all derivatives with respect to the out-of-plane coordinate, also vanish, i.e., $\kappa_{11} = \kappa_{12} = \kappa_{21} = \kappa_{22} = \kappa_{23} = \kappa_{13} = \kappa_{33} = 0$. This yields the reduced constitutive equations expressed in terms of engineering material parameters for the plane-strain state as follows

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+n} \begin{bmatrix} \frac{1-n}{1-2n} & 0 & 0 & \frac{n}{1-2n} \\ 0 & \frac{1}{2(1-N^2)} & \frac{1-2N^2}{2(1-N^2)} & 0 \\ 0 & \frac{1-2N^2}{2(1-N^2)} & \frac{1}{2(1-N^2)} & 0 \\ \frac{n}{1-2n} & 0 & 0 & \frac{1-n}{1-2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\epsilon} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \end{Bmatrix} = \frac{2El_t^2}{1+n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}_2 \boldsymbol{\kappa} \quad (12)$$

where $\mathbf{C}_1$ and $\mathbf{C}_2$ are constitutive matrices. The elastic constant α , as well as the engineering parameters Ψ and l_t do not take place in 2D formulation. The first set of constitutive equations for the plane stress condition can be found in [7], while the second set remains the same as for the plane strain. In this paper, the analysis is restricted to the plane strain case since the available benchmark examples from the literature are presented only for this condition.

3. Finite element analysis of a 2D micropolar continuum

To construct a numerical solution procedure for a boundary value problem, the strong (differential) form is replaced by an integral (weak) form derived from D'Alembert's principle, which extends the virtual work principle to dynamic problems in a 2D micropolar continuum with a constant thickness t and 2D domain S with its boundary curve s , as follows

$$\int_S t(\bar{\epsilon}^T C_1 \epsilon + \bar{\kappa}^T C_2 \kappa) dS - \int_S t(\bar{u}^T (p_v - \rho \ddot{u}) + \bar{\phi}^T (m_v - \rho j \ddot{\phi})) dS - \oint_S t(\bar{u}^T p_s + \bar{\phi}^T m_s) ds = 0, \quad (13)$$

based on which a set of algebraic equations of motion will be obtained according to the finite element method after the introduction of interpolation functions for the real and virtual kinematic fields, the latter denoted by an overbar. After introducing kinematic equations (9) and (10), the kinematic fields have to be approximated using a chosen interpolation in order to obtain the numerical solution of a problem.

3.1 Enhanced fixed-pole interpolation

Here, we introduce the *enhanced fixed-pole interpolation* (EFP) interpolation for approximating the displacement field u as [10]

$$u = \sum_{i=1}^m N_i \left(\rho_i - \frac{1}{k} \hat{r} \phi \right), \quad (14)$$

for an arbitrary number of finite element nodes $m = k^d$, where k represents the number of nodes along the finite element's side, and d is the spatial dimension of finite element, i.e. $d = 1, 2, 3$ for 1D, 2D and 3D respectively. Here, N_i are Lagrange polynomials of order $m - 1$, for $i = 1, \dots, m$, while $r^h = \sum_{i=1}^m N_i r_i^e$ denotes the interpolated initial position vector, where $r_i^e = \langle r_{x1i}^e \ r_{x2i}^e \rangle^T$ is a vector of the nodal coordinates of the i^{th} node. The nonstandard kinematic field is defined as $\rho = u + \hat{r} \phi$, where the operator $\hat{\cdot}$ represents the antisymmetric matrix equivalent to the vector cross product, such that $r \times \phi = \hat{r} \phi$. The rotation field is interpolated using standard Lagrange interpolation: $\phi = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i$. This formulation was originally presented in [17], where it was applied to the numerical analysis of a three-dimensional micropolar continuum, and here is reduced for the two-dimensional case.

For approximation of the displacement field $u^h = N_u p^e$ and the virtual displacement field $\bar{u}^h = N_u \bar{p}^e$, the same enhanced fixed-pole interpolation is used (Bubnov-Galerkin approach), where superscript h denotes the finite element approximation, and superscript e refers to the element to which the interpolation is applied. The matrix of interpolation functions is

$$\mathbf{N}_u = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{N}_m \quad \mathbf{0}] - \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r} [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{N}_m], \quad (15)$$

with the 2D position vector $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^m N_i \mathbf{r}_i$ and zero vector $\mathbf{0}^T = [0 \quad 0]$. The sub-matrices $\mathbf{N}_i$ of the Lagrange polynomials of order $m - 1$ are given as $\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}$ for $i = 1, \dots, m$, where $m = k^2$ stands for the total number of nodes of each 2D finite element. The microrotation and virtual microrotation fields have been interpolated by standard Lagrange polynomials as $\boldsymbol{\phi}^h = \mathbf{N}_\phi \mathbf{p}^e$ and $\bar{\boldsymbol{\phi}}^h = \mathbf{N}_\phi \bar{\mathbf{p}}^e$ with $\mathbf{N}_\phi = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{N}_m]$. By introducing the chosen shape functions for the unknown fields

$$\mathbf{p}^e = \langle \mathbf{p}_1^T \quad \mathbf{p}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_m^T \rangle^{eT}, \quad \bar{\mathbf{p}}^e = \langle \bar{\mathbf{p}}_1^T \quad \bar{\mathbf{p}}_2^T \quad \dots \quad \bar{\mathbf{p}}_m^T \rangle^{eT}, \quad (16)$$

with non-standard degrees of freedom

$$\mathbf{p}_i^T = \langle \rho_{1i} \quad \rho_{2i} \quad \phi_{3i} \rangle^T, \quad \bar{\mathbf{p}}_i^T = \langle \bar{\rho}_{1i} \quad \bar{\rho}_{2i} \quad \bar{\phi}_{3i} \rangle^T, \text{ for } i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

the equation of motion of a 2D micropolar finite element mesh with arbitrary chosen number of nodes m can thus be obtained as

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{el}} \bar{\mathbf{p}}^{eT} \left[\int_S t \left[\left(\mathbf{B}_\rho^T - \frac{1}{k} \mathbf{B}_R^T + \left(\frac{k-1}{k} \right) \mathbf{B}_{I\phi}^T \right) \mathbf{C}_1 \left(\mathbf{B}_\rho - \frac{1}{k} \mathbf{B}_R + \left(\frac{k-1}{k} \right) \mathbf{B}_{I\phi} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (\mathbf{N}_\phi^T \mathbf{D}_\phi^T) \mathbf{C}_2 (\mathbf{D}_\phi \mathbf{N}_\phi) \right] dS \mathbf{p}^e + \int_S t \begin{bmatrix} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{N}_\phi^T \rho_j \mathbf{N}_\phi \end{bmatrix} dS \bar{\mathbf{p}}^e - \right. \\ \left. \int_S t \left(\begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \\ \mathbf{N}_\phi^T \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_v \\ \mathbf{m}_v \end{Bmatrix} \right) dS - \int_S \left(\begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \\ \mathbf{N}_\phi^T \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_s \\ \mathbf{m}_s \end{Bmatrix} \right) dS \right] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \bar{\mathbf{p}}^{eT} (\mathbf{K}^e \mathbf{p}^e + \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{p}}^e - \mathbf{f}^e) = 0. \quad (19)$$

In equation (19), $\mathbf{K}^e$, $\mathbf{M}^e$ and $\mathbf{f}^e$ represent the element stiffness and mass matrix and external force vector of an element e , for $e = 1, \dots, n_{el}$, where n_{el} is the total number of elements in a mesh, t stands for the thickness of the finite element and $\mathbb{A}$ is the finite-element assembly operator.

The $\mathbf{B}$ matrices of mutual dependence of the strains in the element with unknown nodal degrees of freedom in (18) are $\mathbf{B}_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\rho 1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_{\rho m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_R = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_{R1} \quad \dots \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_{Rm}]$, $\mathbf{B}_{I\phi} = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_{I\phi 1} \quad \dots \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_{I\phi m}]$, while the sub-matrices in $\mathbf{B}_\rho$, $\mathbf{B}_R$ and $\mathbf{B}_{I\phi}$ are

$$\mathbf{B}_{\rho i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{Ri} = \begin{bmatrix} r_{x2i} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ r_{x2i} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ -r_{x1i} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ -r_{x1i} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{I\phi i} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_i \\ -N_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

It is also important to note that the external loads should be determined according to the chosen interpolation functions when satisfying the finite element equilibrium equation. In other words, the external moments should be defined with respect to the fixed pole exactly as it has been shown in (18).

3.2 Quadrilateral micropolar FE with four and nine nodes

For discretisation of the 2D micropolar continuum, quadrilateral finite elements with 4 and 9 nodes with three degrees of freedom per node have been chosen, where the proposed enhanced fixed-pole interpolation is used to interpolate the displacement field and Lagrange interpolation for the rotational field. The mapping between the natural and global coordinate system is defined as $\mathbf{x}^h = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i^e$, where $\mathbf{x}_i^e = \langle x_{1i}^e \ x_{2i}^e \rangle^T$ and x_{1i}^e, x_{2i}^e are the i^{th} node coordinates of an element. The Lagrange polynomials for the quadrilateral element with four nodes $m = 4$ (Q4) are

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)], \text{ for } i = 1, \dots, 4, \quad (21)$$

where $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1$ are assigned according to the position of the nodes such that $(\xi_i, \eta_i) = (-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$ for $i = 1, \dots, 4$. Lagrange polynomials for the quadrilateral element with nine nodes (Q9) are given as [18]

- For corner nodes:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i), \text{ for } i = 1, \dots, 4, \text{ where } \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1 \quad (22)$$

- Mid-side nodes:

$$\begin{aligned} N_{i+4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2)(\eta + \eta_{i+4}), \text{ for } i = 1, 3, \\ N_{i+4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi + \xi_{i+4})(1 - \eta^2), \text{ for } i = 2, 4, \end{aligned} \quad (23)$$

where $\xi_5 = \xi_7 = 0, \eta_5 = -1, \eta_7 = 1$, and $\xi_6 = 1, \xi_8 = -1, \eta_6 = \eta_8 = 0$.

- Middle node: $N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$. (24)

After introducing the chosen interpolation into (18), the full numerical integration procedure has been applied (following [18]) in order to compute the element mass and stiffness matrix and the load vector. In terms of the standard degrees of freedom $\mathbf{p}_s^e = \langle \mathbf{p}_{s1}^T \dots \mathbf{p}_{sm}^T \rangle^{eT}$, with $\mathbf{p}_{si}^T = \langle u_{1i} \ u_{2i} \ \phi_{3i} \rangle^T$ approximated weak form (19) may be written as

$$\bar{\mathbf{p}}_s^T (\mathbf{K}_s \mathbf{p}_s + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{p}}_s - \mathbf{f}_s) = 0 \text{ for arbitrary } \bar{\mathbf{p}}_s \Rightarrow \mathbf{K}_s \mathbf{p}_s + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{p}}_s = \mathbf{f}_s, \quad (25)$$

with $\mathbf{M}_s = \mathbb{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{M}_s^e$, $\mathbf{K}_s = \mathbb{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{K}_s^e$ and $\mathbf{f}_s = \mathbb{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{f}_s^e$, where $\mathbf{K}_s^e = \mathbf{R}_o^e \mathbf{K}^e \mathbf{R}_o^{eT}$ and $\mathbf{M}_s^e = \mathbf{R}_o^e \mathbf{M}^e \mathbf{R}_o^{eT}$ where $\mathbf{R}_o^e$ follows from (14) as

$$\mathbf{R}_o^e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left[\frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 \right]^T & 1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \left[\frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{nel} \right]^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

4. Numerical examples

The newly developed micropolar finite elements (*Q4EFP* and *Q9EFP*) have been implemented in *FEAP* (Finite Element Analysis Program [19]). The convergence of the proposed finite element has been evaluated by performing a set of patch tests specifically derived for micropolar finite elements (for detail, see [20], [21]). Since the proposed *EFP* formulation, ultimately results in a formulation that is identical to that presented in [21], where quadrilateral FE with the linked interpolation were used only for static analysis, the numerical results of these patch tests are identical, and therefore there is no need to present them in detail here. However, it should be emphasised that the Petrov-Galerkin approach followed in [21] is not applied here, and that the fixed-pole formulation can be generalised to higher order elements in a very elegant way. In static analysis, this family of elements has already been shown to be convergent and capable of eliminating *shear-locking*, thus achieving faster convergence towards the exact solution compared to conventional elements (as demonstrated on the benchmark example of pure bending [17], [21]). On the other hand, the application of such a finite element formulation for the dynamic analysis of a planar micropolar continuum has not yet been reported.

4.1 Vibration analysis

A free vibration analysis for the following problems has been conducted:

- i. Planar cantilever beam (CF) of length $L = 3.3$ mm and height $h = 0.165$ mm,
- ii. Planar beam clamped on both sides (CC) with the same properties as in (i),
- iii. Cantilever square planar membrane with a central circular hole (CF) with edge-length $L = 3.3$ mm and radius of the hole $r = 0.33$ mm,
- iv. Fully clamped circular planar membrane of radius $R = 1.65$ mm with a central circular hole $r = 0.33$ mm,

while the thickness t in all examples is taken as unity. All clamped boundaries are defined by restraining all three degrees of freedom along the entire edge — over the full side(s) for the rectangular domains and along the outer circumference for the circular domain. The material properties are as in [22]: $G = 104$ MPa, $n = 0.44$, $N^2 = 0.04$, $l_b = 0.33$ mm, $l_t = 0.62$ mm, $\Psi = 1.5$, $\rho = 2000$ kg/m³, $j = 5 \cdot 10^{-5}$ m², $\rho j = 10^{-1}$ kg/m. Schematic presentations of the geometries and FE discretisations of the square and circular planar membranes with a hole are shown in Figure 1.

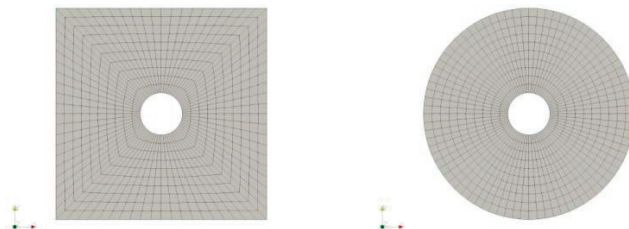


Figure 1. Schematic representation of discretisation in numerical examples (iii - left) and (iv - right) with a mesh of 10x10 elements per each quadrant

The present quadrilateral micropolar FE with four nodes $Q4EFP$ and with nine nodes $Q9EFP$ have been used to discretise those geometries. The coefficient k appearing in the enhanced fixed-pole interpolation stands for the number of nodes along the element edge, i.e. $k = 2$ for $Q4EFP$ and $k = 3$ for $Q9EFP$. The numerical results have been also obtained using the original fixed-pole interpolation ($Q4OFP$ and $Q9OFP$ with $k = 1$) and the standard Lagrange interpolation LI (elements $Q4LI$, $Q9LI$). In the analysis of the Timoshenko beam, the application of EFP interpolation produces a stiffness matrix equivalent to that obtained using Lagrange interpolation with reduced numerical integration, thus eliminating *shear-locking*. In the case of continuum analysis, this equivalence no longer holds, and reduced

numerical integration can be applied to further improve the accuracy of the results. Therefore, in the numerical examples presented here, both full and reduced numerical integration are employed for the computation of the stiffness matrix in the case of lower-order elements. Figures 2 – 5 show the convergence curves for the first two natural frequencies obtained using $Q4$ elements with full integration (first row), $Q4$ with reduced integration (second row), and $Q9$ with full integration (third row). At the higher frequencies, all three curves seem to match quite closely. The reference solutions have been computed using very dense meshes of Q9LI elements. The reference solutions for the problems (i) and (iv) coincide with the numerical results from [22], which verifies the accuracy of the model. Based on this, we analyse the problems (ii) and (iii) with different boundary conditions. The reference solutions can be found in Table 1.

Table 1. Reference solutions for the natural frequencies (f_1 and f_2) of all four considered numerical example.

Example	f_1 [kHz]	f_2 [kHz]
CF beam (i) [22]	1.59481	4.76076
CC beam (ii)	3.75830	6.45379
Square membrane (iii)	2.43085	3.96779
Circular membrane (iv) [22]	5.68080	7.54525

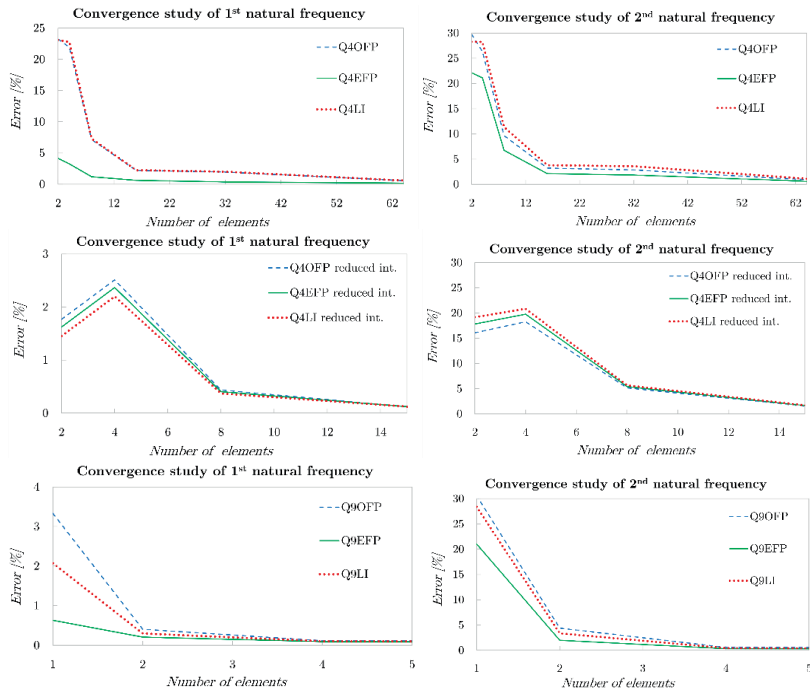


Figure 2. Convergence of the first (left) and second (right) natural frequencies of the cantilever beam (i)

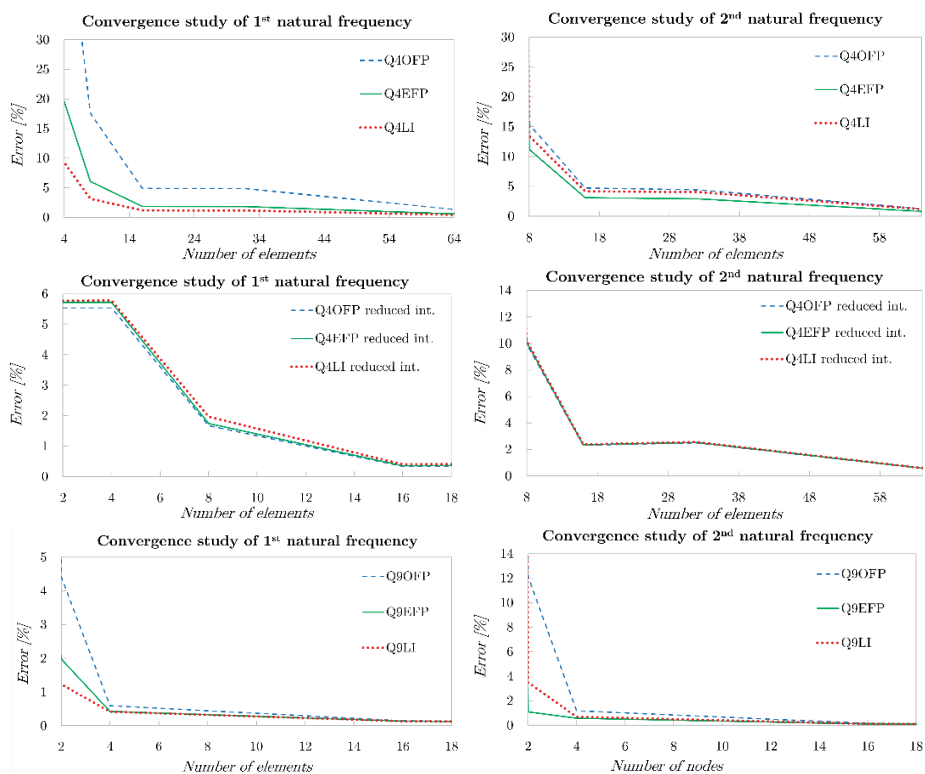
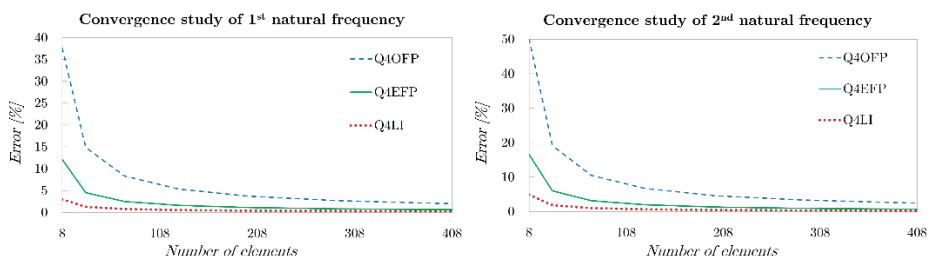


Figure 3. Convergence of the first (left) and second (right) natural frequencies for the fully clamped (ii)



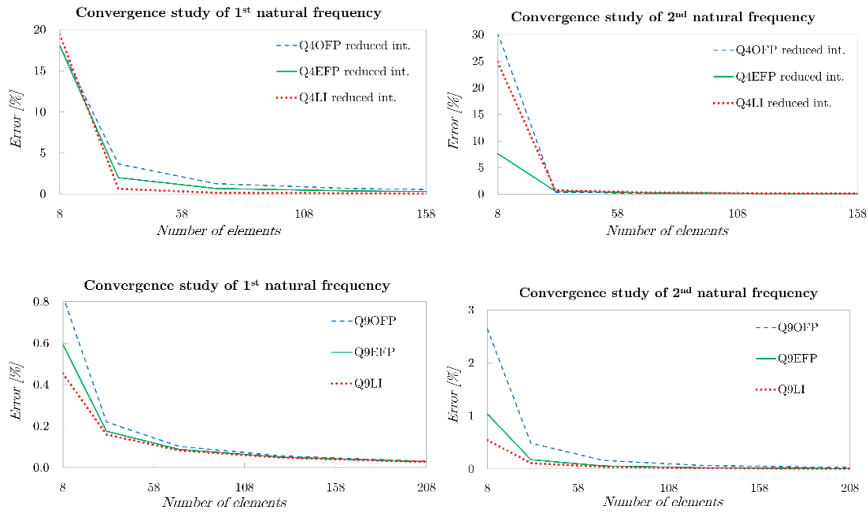


Figure 4. Convergence study of the first (left) and second (right) natural frequencies for the cantilever square planar membrane with a circular hole (iii)

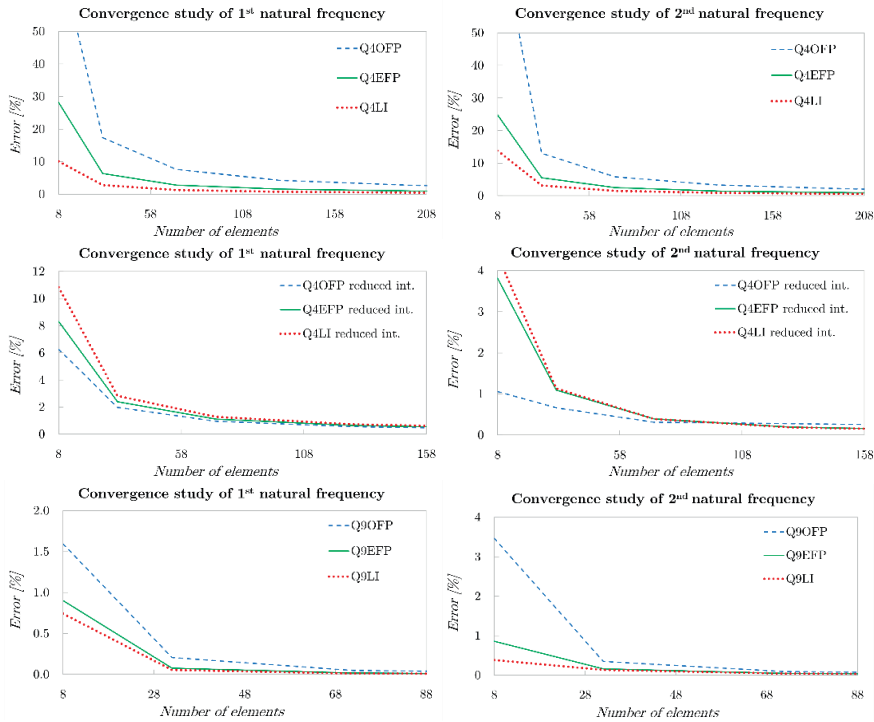


Figure 5. Convergence study of the first (left) and second (right) natural frequencies for the circular planar membrane with a circular hole (iv)

The convergence study of the first two natural frequencies for the planar beam (i), shown in Figure 2, clearly demonstrates the efficiency of the $Q4$ and $Q9$ elements with the EFP interpolation and full numerical integration, compared to the other two. However, this difference in efficiency is smaller for the planar beam clamped on both sides (ii), as observed in Figure 3 for the second frequency, while for the first frequency, the Lagrange elements show slightly better results. It should be emphasised that the presented numerical examples are discretised using membrane finite elements under plane-strain conditions, and that the in-plane vibrations of the model are considered. In the second example (ii), the additional boundary constraints on the right end further increase the overall stiffness of the system, which may favour the Lagrange elements due to their inherently stiffer formulation for coarse meshes. To further investigate the influence of model stiffness, an additional analysis of the same CC beam (ii_b) has been performed, with identical geometric and material properties except for the characteristic length, which has been reduced ten times; that is, the characteristic length is now $l_b = 0.033$ mm, giving $\frac{l_b}{h} = 0.2$. A smaller characteristic length reduces the influence of the microstructure, resulting in a softer response and lower natural frequencies. The reference solutions, obtained numerically in the same way as for the previous examples, are $f_1 = 0.81000909$ and $f_2 = 1.07559623$ [kHz]. Figure 6 shows the convergence study of the first two natural frequencies for the planar beam (ii_b) using $Q4$ elements with full numerical integration, where the proposed EFP interpolation now demonstrates faster convergence compared to the other two approaches.

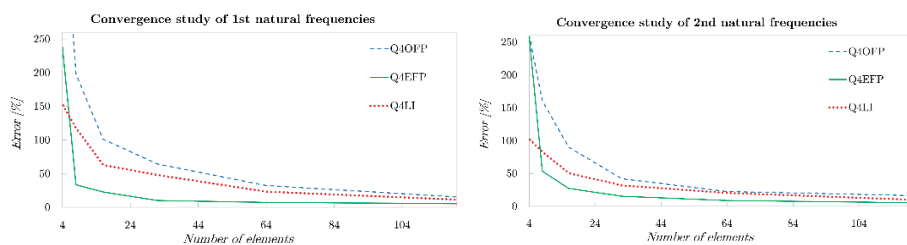


Figure 6. Convergence of the first (left) and second (right) natural frequencies for the fully clamped (ii_b)

For the cases of the square and circular planar membrane with a circular hole, we have results indicating that the Lagrange interpolation provides the most accurate description for coarse meshes, as illustrated in Figures 4 and 5. All elements, however, exhibit proper convergence with mesh refinement. To better understand this somewhat unexpected behaviour, a numerical example from reference [10] that represents a 3D square domain with a central circular hole has been considered. In that study, for

the cantilever configuration, the 3D micropolar finite elements with *EFP* interpolation clearly demonstrated higher efficiency. The main reason why the present planar analysis leads to somewhat different conclusions may lie in the plane-strain assumption adopted here, as well as in the geometric proportions of the analysed model. In the present (*iii*) case, the ratio between the side length of the square domain and the hole radius is $\frac{L}{r} = 10$, whereas in reference [10] the side length is $L = 33$ mm, and the radius is $r = 0.3L$, giving $\frac{L}{r} = 3.3$ (i.e., a larger hole and therefore a less stiff configuration). When the 3D numerical example [10] is reduced to plane-strain conditions as an additional case (*iii_b*), with unchanged material parameters and using *Q4* elements with full numerical integration, the reference solutions for the first two natural frequencies are $f_1 = 0.82229$ and $f_2 = 1.57183$ [kHz]. A visibly faster convergence of the *EFP* and *OFP* interpolations is obtained for the first natural frequency, while for the second frequency, the results of the *Q4LI* and *Q4EFP* elements almost coincide, as shown in Figure 7.

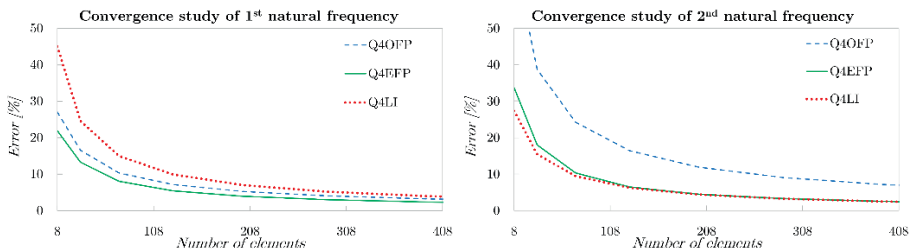


Figure 7. Convergence of the first (left) and second (right) natural frequencies for the fully clamped (*iii_b*)

For the mesh consisting of only eight elements, the maximum difference in error between the numerical results obtained using *Q4LI* and *Q4EFP* elements for the first two eigenfrequencies is 18.08% for case (*iv*) in the first mode, whereas the maximum difference between *Q9LI* and *Q9EFP* elements is 0.47% for the second mode of case (*iv*). It can be observed that in the case of the circular planar membrane (*iv*), the Lagrange elements provide the most accurate results on coarse meshes. In this numerical example, the membrane is fully clamped along the entire outer circular edge, which makes the system very stiff. In the future work, it would be useful to conduct additional analyses with different boundary conditions allowing more degrees of freedom.

In contrast to the conclusions drawn in the analysis of the Timoshenko beam [9], here the original fixed-pole interpolation does not improve the results. Moreover, in all cases, where the full numerical integration is

employed, it gives either the same or worse results than the Lagrange interpolation, which leads us to the conclusion that this type of interpolation should not be recommended for application in a micropolar continuum if the reduced numerical interpolation is not applied. In all numerical examples, all formulations employing reduced numerical integration provide more accurate results on coarse meshes in general. The differences between the formulations become evident in examples (iii) and (iv), for the second natural frequency, where the *EFP* and *OFP* interpolations yield the most accurate results, respectively.

5. Conclusion

In this paper, new two-dimensional micropolar finite elements of arbitrary order have been developed using the enhanced fixed-pole (*EFP*) interpolation. While it is well established that this formulation achieves faster convergence to the exact solution in linear static analysis compared to standard Lagrange elements, the vibration analysis presented here introduces several new numerical examples that reveal a more diverse behaviour. The improvement offered by the *EFP* interpolation is observed only in certain cases, whereas the Lagrange elements tend to perform slightly better for stiffer models and when full numerical integration is applied. Given the limited literature addressing the dynamic behaviour of micropolar continua, the present study contributes new benchmark results and provides a solid basis for further investigations. Future work will focus on a detailed parametric study on the influence of micropolar material parameters on the vibration response, as well as on the possibility of extending the applicability of the fixed-pole concept to problems involving large three-dimensional rotations within the micropolar continuum.

Acknowledgments. *The presented research has been financially supported by the CSF projects (HRZZ-DOK-2018-09-8806 and HRZZ-IP-2024-05-9904) as well as (uniri-mz-25-19).*

References

- [1] Lakes, R. S. (2023) Experimental Evaluation of Micromorphic Elastic Constants in Foams and Lattices. *ZAMP*, 74 (1), str. 1–11.
- [2] Drugan, W. J., Lakes, R. S. (2018) Torsion of a Cosserat Elastic Bar with Square Cross Section: Theory and Experiment. *ZAMP*, 69 (2).
- [3] Nowacki, W. K. (1985) *Theory of Asymmetric Elasticity*. Warszawa: Pergamon Press.

- [4] Cosserat, E., Cosserat, F. (1909) *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman.
- [5] Voigt, W. (1887) *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*. Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, 3 (34), str. 3–52.
- [6] Eringen, A. C. (2012) *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. New York: Springer Verlag.
- [7] Nowacki, W. (1974) *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*. Courses and lectures CISM, Udine, str. 1–43.
- [8] Bottasso, C. L., Borri, M. (1998) Integrating Finite Rotations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164 (3–4), str. 307–331.
- [9] Žiković, L., Jelenić, G. (2021) Primjena fixed-pole interpolacije u linearnoj dinamičkoj analizi Timošenkove grede. *Zbornik radova 11. susreta HDM-a*. Rijeka, HDM, str. 369–375.
- [10] Grbac, L., Jelenić, G., Ribarić, D., Grbčić Erdelj, S. (2024) Hexahedral Finite Elements with Enhanced Fixed-Pole Interpolation for Linear Static and Vibration Analysis of 3D Micropolar Continuum. *IJNME*, 125 (8), str. 1–27.
- [11] Jelenić, G., Papa, E. (2011) Exact Solution of 3D Timoshenko Beam Problem Using Linked Interpolation of Arbitrary Order. *Arch. Appl. Mech.*, 81 (2), str. 171–183.
- [12] Grbčić, S. (2018) *Linked Interpolation and Strain Invariance in Finite-Element Modelling of Micropolar Continuum* (Ph.D. thesis). University of Rijeka and Université de Technologie de Compiègne – Sorbonne Universités.
- [13] Hassanpour, S., Heppler, G. R. (2015) Micropolar Elasticity Theory: a Survey of Linear Isotropic Equations, Representative Notations, and Experimental Investigations. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22 (2), str. 224–242.
- [14] Gauthier, R. D., Jahnman, W. E. (1975) A Quest for Micropolar Elastic Constants. *Journal of Applied Mechanics*, 42 (2), str. 369–374.
- [15] Lakes, R. (2016) Physical Meaning of Elastic Constants in Cosserat, Void, and Microstretch Elasticity. *J. Mech. Mater. Struct.*, 11 (3), str. 217–229.
- [16] Anderson, W. B., Lakes, R. S. (1994) Size Effects Due to Cosserat Elasticity and Surface Damage in Closed-Cell Polymethacrylimide Foam. *Journal of Materials Science*, 29 (24), str. 6413–6419.
- [17] Grbac, L. (2023) *Finite Elements for Linear Analysis of Micropolar Continuum and Relationship between Linked Interpolation and Interpolations on Lie Groups in Linear Form*. Doktorski rad, Sveučilište u Rijeci.
- [18] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Fox, D. (2013) *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics: Seventh Edition*. Amsterdam: Elsevier.
- [19] Taylor, R. L., Govindjee, S. (2020) *FEAP: A Finite Element Analysis Program, Theory Manual*.
- [20] Providas, E., Kattis, M. A. (2002) Finite Element Method in Plane Cosserat Elasticity. *Computers and Structures*, 80 (27–30), str. 2059–2069.

- [21] Grbčić, S., Jelenić, G., Ribarić, D. (2019) Quadrilateral 2D Linked-Interpolation Finite Elements for Micropolar Continuum. *Acta Mechanica Sinica*, 35 (5), str. 1001–1020.
- [22] Kohansal-Vajargah, M., i drugi (2021) Vibration Analysis of Two-Dimensional Structures Using Micropolar Elements. *Appl. Math. Mech.*, 42 (7), str. 999–1012.

NUMERIČKA I EKSPERIMENTALNA ANALIZA DINAMIČKOG ODGOVORA BLOKOVSKOG PORTALA S ELASTIČNIM VEZIVOM

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE DYNAMIC RESPONSE OF A BLOCKY PORTAL FRAME WITH ELASTIC JOINTS

Anđela Janković*, Mateo Ljubić*, Nina Čeh*, Leo Škec*

Sažetak

U radu se analizira dinamički odziv portalnog okvira sastavljenog od krutih blokova povezanih elastičnim vezivima. Razvijen je nelinearni numerički model temeljen na diskretnoj kinematici i implementiran u Pythonu, uz simulaciju odziva pomoću Newmarkove metode. Eksperimentalna ispitivanja provedena su radi validacije modela. Rezultati potvrđuju njegovu primjenjivost za analizu blokovskih sustava i pružaju osnovu za proširenje na nelinearno ponašanje spojeva.

Ključne riječi: *dinamička pobuda, portalni okvir, numerički model, elastična veziva, blokovski sustavi*

Abstract

This paper investigates the dynamic response of a block-based portal frame with elastic joints. A nonlinear numerical model based on discrete kinematics was developed and implemented in Python using the Newmark method. Experimental tests were conducted to validate the model. Results confirm its suitability for analyzing block systems and form a basis for future extension to nonlinear joint behavior.

Key words: *dynamic excitation, portal frame, numerical model, elastic joints, block systems*

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: {ajankovic2,mljubic1}@student.uniri.hr, {nina.ceh, leo.skec}@gradri.uniri.hr

1. Uvod

Ponavljajuća pojava potresa i njihove razorne posljedice na građevinske sustave predstavljaju jedan od ključnih izazova suvremenog građevinarstva. Analiza ponašanja konstrukcija pod dinamičkim opterećenjima stoga je od presudne važnosti, osobito u kontekstu projektiranja sustava povećane otpornosti i stabilnosti. Posebnu ranjivost pri seizmičkim djelovanjima pokazuju konstrukcije sastavljene od krutih blokova povezanih trenjem ili vezivima, što je karakteristično za brojne povijesne građevine zidane tradicionalnim tehnikama [1, 2]. Takvi sustavi, za razliku od onih potpuno nepovezanih, kod kojih se energija disipira kroz ljuljanje blokova [3, 4], mogu doživjeti značajne deformacije u vezivima koja privremeno povezuju elemente. Tek nakon popuštanja veziva sustav prelazi u ponašanje karakteristično za diskretne blokove koji se ljuljaju. Jedan od ključnih problema kod takvih konstrukcija je gubitak učinkovitosti spojeva tijekom potresa, što može rezultirati znatnim pomacima, rotacijama ili čak potpunim urušavanjem dijelova sustava. U cilju boljeg razumijevanja takvog ponašanja, nužno je razvijati računalne modele koji pouzdano opisuju mehaniku kontakta između blokova te omogućuju analizu odziva konstrukcija pri dinamičkim pobudama. Osobit interes pritom izazivaju sustavi s elastičnim vezivima između blokova, koji omogućuju određeni stupanj deformabilnosti i disipacije energije, a istovremeno zadržavaju diskontinuirani karakter konstrukcije.

Postojeći modeli za analizu ponašanja zidanih konstrukcija se uglavnom baziraju na metodi konačnih elemenata (FEM) [5–7] ili metodi diskretnih elemenata (DEM) [8–11], dok se noviji modeli koriste kombinacijom FEM i DEM metode [12]. Portalne konstrukcije, sastavljene od blokova koji čine dva vertikalna stupca povezana blokovima koji čine horizontalni element koji stupce povezuje, analizirane su numerički upravo upotrebom kombinirane FEM-DEM metode [13] i eksperimentalno [14, 15].

U ovom radu istražuje se dinamički odziv jednostavnog portalnog okvira sastavljenog od triju krutih blokova – dvaju stupova i grede – međusobno i s podlogom povezanih elastičnim vezivom. Sustav je modeliran s devet stupnjeva slobode, uzimajući u obzir translacijska i rotacijska gibanja svakog pojedinog bloka u ravnini. Razvijen je numerički model temeljen na principima diskretne mehanike, implementiran u programskom jeziku Python, s ciljem simulacije odziva pomoću Newmarkove metode vremenske integracije. Model uključuje formulaciju jednadžbi gibanja i definiciju karakteristika elastičnih spojeva putem

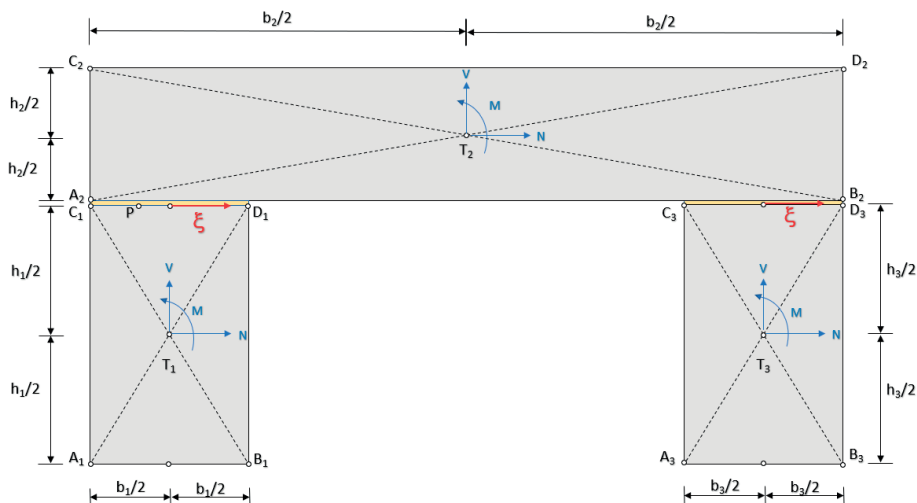
pripadajućih krutostnih matrica. Valjanost modela potvrđena je eksperimentalnim ispitivanjima provedenim u kontroliranim laboratorijskim uvjetima, u kojima su ispitana mehanička svojstva silikonskog veziva te odziv fizičkog modela portala na zadane dinamičke pobude. Dobiveni rezultati omogućuju kalibraciju modela i predstavljaju temelj za njegovu daljnju nadogradnju, uključujući modeliranje nelinearnog ponašanja veziva u cilju preciznijeg predviđanja ponašanja konstrukcija izloženih seizmičkim djelovanjima.

2. Računski model

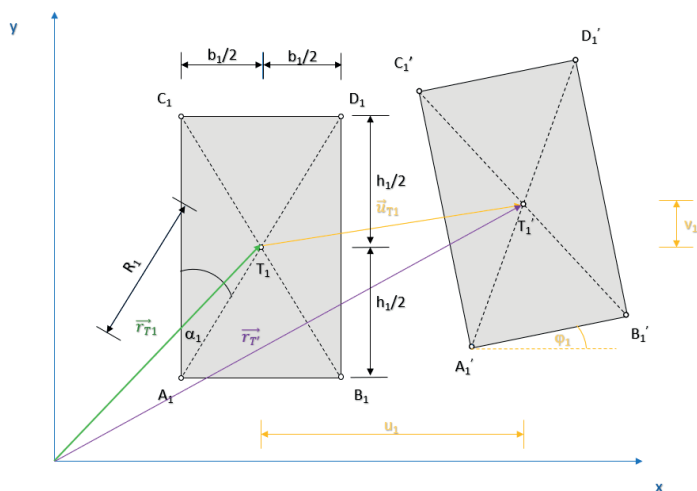
Računski model prikazan na Slici 1 predstavlja portal sastavljen od tri bloka koji su međusobno, ali i s podlogom, povezani elastičnim kontaktom. Blokovi 1 i 3 imaju funkciju stupova u portalu, dok je blok 2 nadvratnik. Svaki od blokova može u svom težištu preuzeti horizontalne i vertikalne sile te momente. U ovom radu analizirat će se kinematika pojedinih blokova, uvođenje elastične veze između blokova koji su povezani međusobno, kao i između samih blokova koji su u kontaktu. Određivanjem matrice krutosti sustava dobivene su vrijednosti vektora pomaka. Dobivene vrijednosti pomaka ovisit će o karakteristikama elastičnih veza te o vanjskim djelovanjima na blokove. Prije uvođenja elastične veze između donje površine bloka i podloge, provodi se analiza kinematike bloka. U sklopu te analize određuju se početni i pomaknuti položaj bloka, a zatim se uspostavlja veza između pomaka težišta i vrhova bloka, koji nastaju uslijed djelovanja vanjskih sila. Ti pomaci prikazuju se vektorom pomaka, koji uključuje translacijske i rotacijske komponente između dva položaja krutog tijela. Na temelju toga izvodi se jednadžba gibanja sustava i definira postupak njezinog numeričkog rješavanja.

2.1 Kinematičke jednadžbe

U mehanici se krutim tijelom smatra tijelo koje tijekom gibanja ne mijenja svoju geometriju niti volumen, odnosno kod kojeg udaljenosti između točaka unutar tijela ostaju konstantne. Gibanja krutog tijela definirana su kao kombinacija translacije i rotacije tijela [3,4]. U ravnini x - y , kinematika krutog tijela opisana je s tri stupnja slobode: dva translacijska pomaka u (u smjeru osi x) i v (u smjeru osi y) te rotacijom φ (oko osi z). Težište pravokutnog bloka u početnom položaju definirano je vektorom položaja $\vec{r}_T$. Kada se tijelo pomakne, novi položaj težišta opisan je vektorom $\vec{r}_T'$, koji je zbroj vektora početnog položaja $\vec{r}_T$ i vektora pomaka $\vec{u}_T$ (vidi Sliku 2).



Slika 1. Računski model sastavljen od tri bloka



Slika 2. Početni (\$T_1\$) i novi (\$T_1'\$) položaj težišta krutog bloka 1

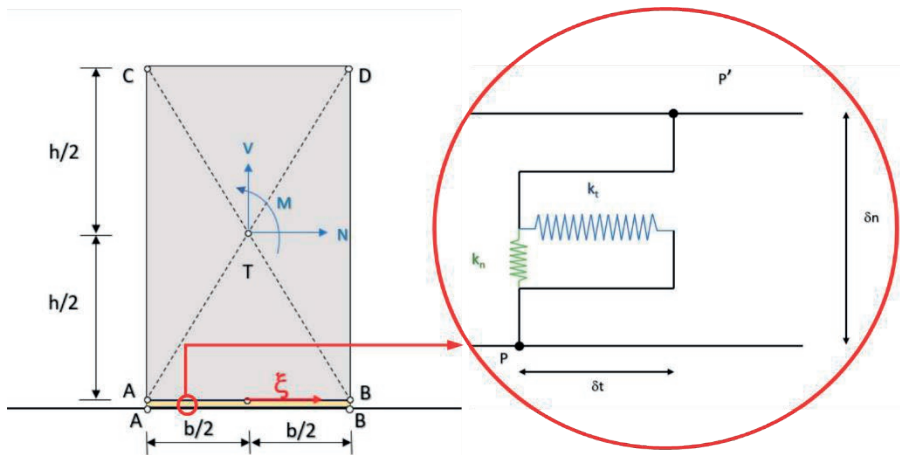
Za potrebe analize, za svaki blok potrebno je zapisati komponente vektora pomaka svih uglova bloka (A, B, C i D) u funkciji poznatih veličina: horizontalnog i vertikalnog pomaka težišta u_i i v_i , rotacijske komponente

φ_i , te geometrijskih parametara (visine i širine), pri čemu se indeks i odnosi na blok i . U slučaju malih rotacija pretpostavljamo $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$ i $\cos \varphi_i \approx 1$, pa konačni izrazi za pomake uglova bloka glase:

$$\begin{aligned} u_{Ai} &= u_i + \frac{h_i}{2} \cdot \varphi_i, v_{Ai} = v_i - \frac{b_i}{2} \cdot \varphi_i, \\ u_{Bi} &= u_i + \frac{h_i}{2} \cdot \varphi_i, v_{Bi} = v_i + \frac{b_i}{2} \cdot \varphi_i, \\ u_{Ci} &= u_i - \frac{h_i}{2} \cdot \varphi_i, v_{Ci} = v_i - \frac{b_i}{2} \cdot \varphi_i, \\ u_{Di} &= u_i - \frac{h_i}{2} \cdot \varphi_i, v_{Di} = v_i + \frac{b_i}{2} \cdot \varphi_i. \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 Modeliranje veziva

Elastični kontakt između bloka i podloge modelira se kao niz linearno-elastičnih opruga čija je krutost definirana normalnom (k_n) i tangencijalnom (k_t) komponentom (vidi Sliku 3).



Slika 3. Linearno-elastični model veziva s normalnom (k_n) i tangencijalnom (k_t) krutosti. Uvećani detalj prikazuje sustav s horizontalnim i vertikalnim oprugama.

Relativni pomaci točaka kontakta u normalnom (δ_n) i tangencijalnom (δ_t) smjeru uzduž širine elastičnog sloja ovise o pomacima i rotaciji bloka te o lokalnoj koordinati ξ elastičnog kontakta koja se mjeri od sredine kontakta udesno ($\xi \in [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$). Vektor relativnih pomaka na kontaktu $\delta = [\delta_t \ \delta_n]^T$ može se zapisati kao:

$$\delta(\xi) = B(\xi) \cdot u, \quad (2)$$

gdje je

$$B(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h}{2} & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix}, \quad (3)$$

transformacijska matrica dok je $u = [u \ v \ \varphi]^T$.

Veza kontaktnih naprezanja i relativnih pomaka na kontaktu je linearno elastična [5], što se može zapisati kao:

$$\sigma(\xi) = S \cdot \delta(\xi), \quad (4)$$

gdje je

$$S = [k_t \ 0 \ 0 \ k_n], \quad (5)$$

konstitutivna matrica.

Ovakva definicija veze bloka s podlogom korist će se u ovom radu za modeliranje veza blokova 1 i 3 (stupova portala) s podlogom. Na sličan način može se definirati i veza između blokova 1 i 3 (stupova) s blokom 2 (nadvratnikom). Detaljni izvodi dani su u [5].

2.3 Rješenje statičkog problema jednog bloka povezanog s podlogom

Izjednačavanjem potencijalne energije deformacija pohranjene u vezivu i rada vanjskih sila [6] može se zapisati ravnotežna jednadžba statičkog problema jednog bloka povezanog s podlogom linearno-elastičnom vezom:

$$K \cdot u = f, \quad (6)$$

gdje je

$$K = d \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B(\xi)^T \cdot S \cdot B(\xi) d\xi, \quad (7)$$

matrica krutosti, a $f = [N \ V \ M]^T$ vektor vanjskog opterećenja koji sadrži horizontalnu (N) i vertikalnu silu (V) te koncentrirani moment (M) koji djeluju u težištu bloka (vidi Sliku 3). Detalji izvoda jednadžbi (6) i (7) dani su u [19].

2.4 Jednadžbe kretanja sustava

Uvođenjem dinamičkih sila i korištenjem drugog Newtonovog zakona, jednadžba (6) se proširuje dodavanjem matrice masa M i vektora ubrzanja bloka $\ddot{u}$, te poprima oblik:

$$M \cdot \ddot{u} + C \cdot \dot{u} + K \cdot u = f, \quad (8)$$

gdje je C matrica prigušenja koja predstavlja disipaciju energije tijekom dinamičke pobude, dok je $\dot{u}$ vektor brzine bloka. Matrica prigušenja C definirana je Rayleighjevim prigušenjem kao linearna kombinacija matrica mase i krutosti:

$$C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K, \quad (9)$$

pri čemu se koeficijenti a_0 i a_1 određuju na temelju koeficijenta prigušenja ζ i prirodnih frekvencija sustava ω za dva uzastopna tona slobodnih oscilacija j i $j + 1$ prema izrazima [7]:

$$a_0 = \zeta \cdot \frac{2\omega_j\omega_{j+1}}{\omega_j + \omega_{j+1}}, \quad (10)$$

$$a_1 = \zeta \cdot \frac{2}{\omega_j + \omega_{j+1}}. \quad (11)$$

Za rješavanje diferencijalne jednadžbe koristi se Newmarkova metoda numeričke integracije, koja se često primjenjuje u rješavanju problema dinamičkog odziva konstrukcija s više stupnjeva slobode, a pod utjecajem vremenski ovisnih sila [8]. Vremenska domena se diskretizira tako da se ukupno trajanje dinamičke analize podijeli na jednake vremenske intervale. Jednadžba kretanja sustava (8) zapisuje se za svaki vremenski trenutak t , čime se omogućuje određivanje pomaka i sila u svakom trenutku analize. Detalji oko rješavanja problema Newmarkovom metodom dani su u [5].

U slučaju kada sustav opterećujemo pobudom podloge (kao što je to slučaj kod potresa), jednadžbu gibanja kojom opisujemo dinamički problem možemo zapisati kao:

$$M \cdot \ddot{u}_{rel} + C \cdot \dot{u}_{rel} + K \cdot u_{rel} = -M \cdot \ddot{u}_b \cdot e, \quad (12)$$

gdje je u_{rel} relativni pomak bloka u odnosu na podlogu, u_b pomak podloge, a e je vektor istih dimenzija kao u koji je ispunjen nulama, a na mjestima horizontalnih pomaka ima jedinice. Dimenzije vektora i matrica ovise o broju blokova, pa tako za portal sastavljen od tri bloka imamo 9 stupnjeva slobode, što čitav problem čini numerički vrlo efikasnim. Kompletni

Python kod za simulaciju dinamičkog opterećenja portala dostupan je u [6].

3. Eksperimentalna ispitivanja

Kako bi se eksperimentalno odredile materijalne karakteristike elastičnog kontakta, provedena su ispitivanja pomoću drvenih blokova različitih dimenzija. Za ispitivanja posmika i tlaka korišteni su blokovi dimenzija 45×45×90 mm, dok su za ispitivanje vlaka korišteni blokovi dimenzija 30×60×120 mm. Na kontaktne površine blokova nanesen je sloj silikona debljine 2 mm te je ostavljen određeni period da očvrсне i uspostavi vezu s drvenim površinama. Nakon očvršćivanja silikona, na uglove i težišta blokova postavljene su samoljepljive točkice koje omogućuju optičko mjerenje pomaka tijekom ispitivanja. Pripremljeni uzorci zatim su izloženi djelovanju vanjskih sila koje izazivaju vlak, tlak i posmik, pri čemu se bilježe relativni pomaci i dijagrami sila i pomaka. Na temelju tih podataka određene su vrijednosti kontaktnih krutosti k_n i k_t , koje su zatim korištene u numeričkom modelu za simulaciju ponašanja blokovskog sustava. Dobivene krutosti omogućile su usporedbu eksperimentalnog ponašanja uzoraka s odgovorom koji daje računski model razvijen u Pythonu.

3.1 Opis opreme i eksperimentalnog postava

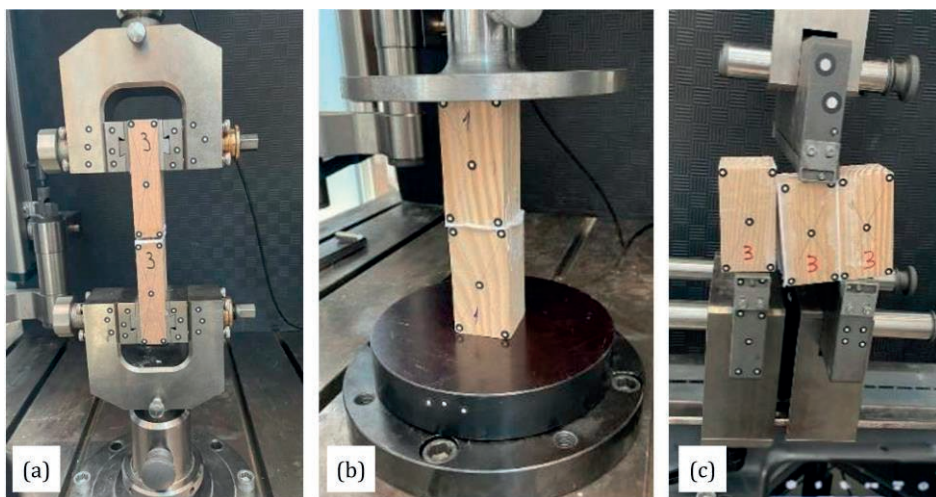
Prilikom ispitivanja korišten je univerzalni tlačno-vlačni stroj (kidalica) Z600 Zwick/Roell te sustav kamera za optička mjerenja (GOM/ZEISS mbH PONTOS 3D 4M) [9]. Radni prostor kidalice podijeljen je na prostor za vlačna ispitivanja, prostor za tlačna ispitivanja i prostor za ispitivanje na savijanje. Ispitivanja su provedena kontrolom pomaka. Drveni blokovi ugrađuju se na čeljusti za prihvat uzoraka te se ispituju, dok se podaci mjere i bilježe računalom putem softverskog paketa testXpert II. Portal sastavljen od tri bloka ispituje se na potresnu pobudu, a pomaci tijekom opterećenja mjere se sustavom kamera za optička mjerenja. Sustav se sastoji od dvije brze kamere koje omogućuju snimanje do 168 fps pri rezoluciji od 2400×1728 piksela te do 1300 fps u smanjenoj rezoluciji.

3.2 Provedena ispitivanja

Kako bi se utvrdile materijalne karakteristike silikona (k_n i k_t), provedena su ispitivanja na vlačna, tlačna i posmična naprezanja (Slika 4).

Sva ispitivanja izvedena su na tlačno-vlačnom stroju uz odgovarajuću prilagodbu prihvata uzoraka ovisno o vrsti ispitivanja.

Kod vlačnih ispitivanja, uzorci su opterećeni vlačnom silom koja nastoji razdvojiti blokove pridržane mehaničkim čeljustima (Slika 4(a)). Tlačna ispitivanja izvedena su nanošenjem aksijalne sile preko kružnih čeličnih ploča postavljenih na površinu blokova (Slika 4(b)). Tijekom posmičnih ispitivanja primijenjen je princip savijanja u tri točke, pri čemu je središnji blok istiskan u odnosu na dva vanjska bloka (Slika 4(c)).



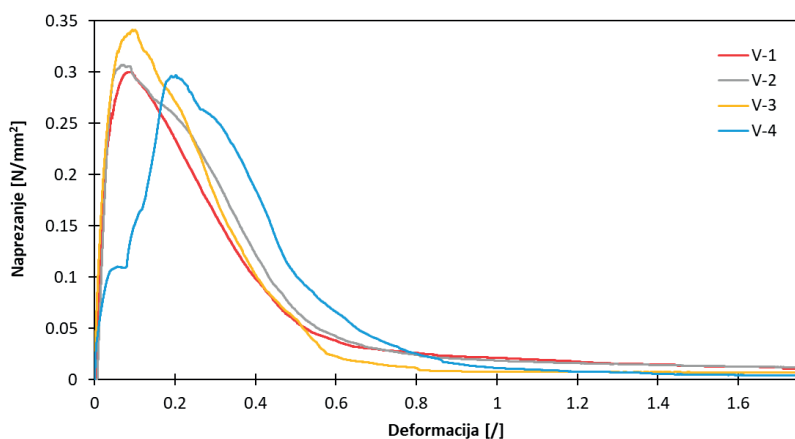
Slika 4. Ispitivanje na drvenim uzorcima: (a) vlak, (b) tlak i (c) posmik

Tijekom tlačnih ispitivanja uočeno je da se silikon istisnuo iz spoja, ali se nakon rasterećenja vratio u početni položaj bez odvajanja. S druge strane, vlačna ispitivanja izazvala su djelomično odvajanje silikona na kontaktnoj plohi, dok su posmična naprezanja uzrokovala potpuno odvajanje vanjskog bloka, što upućuje na popuštanje spoja. Odvajanje silikona od drva može biti posljedica nedovoljno dobre pripreme kontaktne plohe ili prisutnosti smole u drvu, što negativno utječe na adheziju.

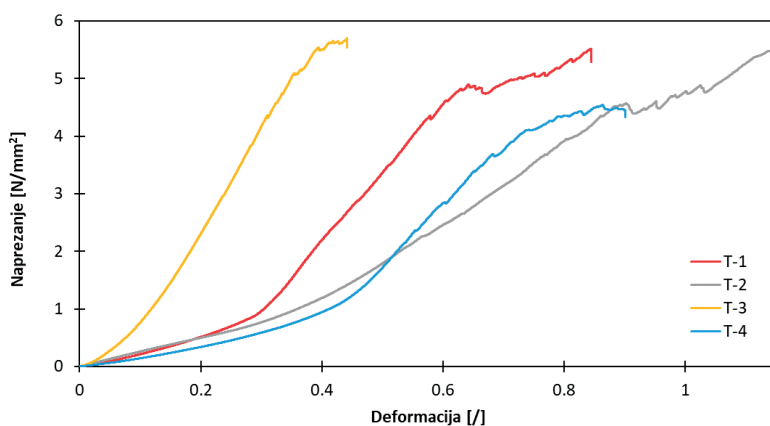
Na Slikama 5-7 prikazani su dijagrami naprezanje–deformacija za vlačne, tlačne i posmične testove, slijedom. Naprezanje σ dobiva se kao omjer izmjerene sile na kidalici i kontaktne površine, a deformacija ϵ kao omjer izmjerenog relativnog pomaka i početne debljine silikonskog sloja. Za svaki tip test ispitana su po 4 uzorka. Međutim, jedan uzorak iz vlačnog i jedan iz tlačnog ispitivanja izostavljeni su zbog znatnog odstupanja, dok su za posmična ispitivanja korišteni svi rezultati.

Kod vlačnih ispitivanja (Slika 5) može se uočiti strma linearna grana nakon koje nastupa omekšanje, odnosno postepeno oštećenje. Kod tlačnih ispitivanja (Slika 6) također je uočena početna linearna grana, ali nakon nje spoj pokazuje porast krutosti, što je posljedica nalijeganja jednog bloka na drugi.

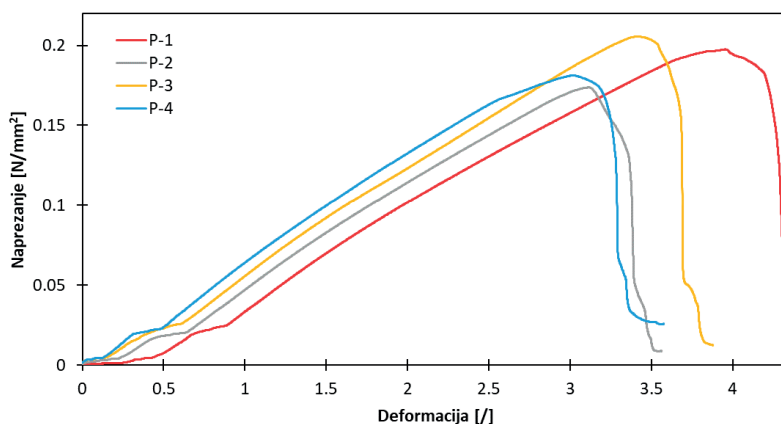
Kod posmika (Slika 7), nakon početne linearne grane dolazi do relativno naglog otkazivanja spoja. Na temelju ispitivanja može se zaključiti da ovaj tip silikona pokazuje znatne deformacije pod opterećenjem, čak i u linearno-elastičnom području. Takvo ponašanje je pogodno jer omogućuje lakše i točnije mjerenje pomaka u dinamičkim ispitivanjima.



Slika 5. Dijagram naprezanje-deformacija za vlačna ispitivanja



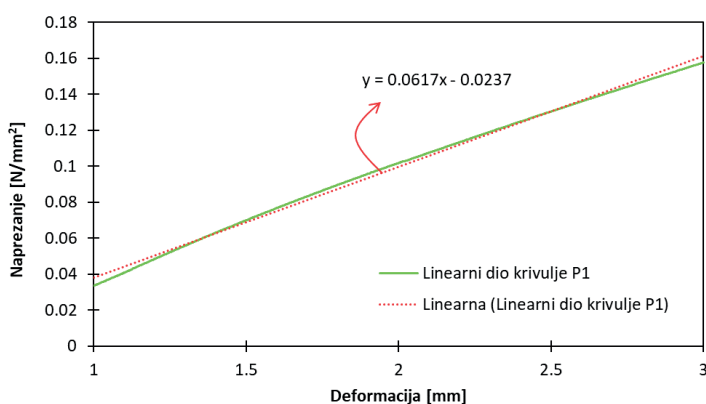
Slika 6. Dijagram naprezanje-deformacija za tlačna ispitivanja



Slika 7. Dijagram naprezanje-deformacija za posmična ispitivanja

Iz dobivenih dijagrama odabrani su linearni dijelovi koji opisuju ponašanje silikona u elastičnom području. Linearni dio aproksimiran je pravcem koristeći funkciju Linear Trendline u programu MS Excel, što je za primjer jednog ispitivanja prikazano na Slici 8.

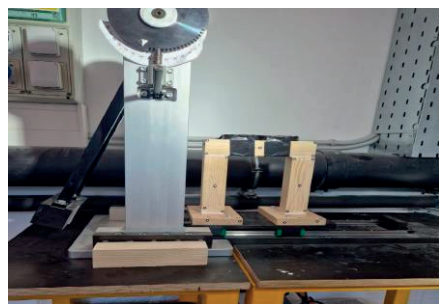
Nagib dobivenog pravca predstavlja modul elastičnosti, koji je zatim podijeljen s debljinom silikonskog sloja kako bi se dobile krutosti k_n i k_t . Normalna krutost $k_n = 3,07 \text{ N/mm}^3$ dobivena je kao srednja vrijednost rezultata vlačnih i tlačnih ispitivanja, dok je tangencijalna krutost $k_t = 0,03 \text{ N/mm}^3$ srednja vrijednost iz rezultata posmičnih ispitivanja.



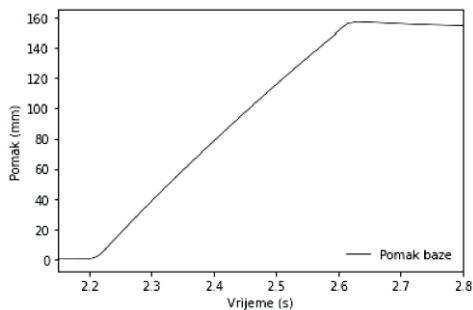
Slika 8. Aproksimacija linearnog dijela krivulje uzorka P1 pravcem

4. Rezultati i diskusija

Dinamički eksperiment portala sastavljenog od tri bloka, međusobno i s podlogom povezanih silikonom debljine 2 mm, proveden je na uređaju Roori-2 za nanošenje dvostrukog impulsnog opterećenja. Uređaj se sastoji od dijela koji služi za nanošenje impulsne sile, podloge koja je ujedno i klizni dio na koji je portal prihvaćen te odbojnika (Slika 9(a)). Nakon što je portal pričvršćen za kliznu podlogu, preko bata se nanosi impulsna sila te portal zajedno s kliznom podlogom klizi do odbojnika, gdje se događa drugi impuls sile. Pomaci i rotacije koje su se događale tijekom putanje portala po kliznoj plohi bilježile su se optičkom mjernom opremom opisanom u poglavlju 3.1. Kako bi se preciznije oscilacije blokova mogle preciznije optički snimiti, dodana je masa od 2 N na blok 2 (Slika 9(a)).



(a)



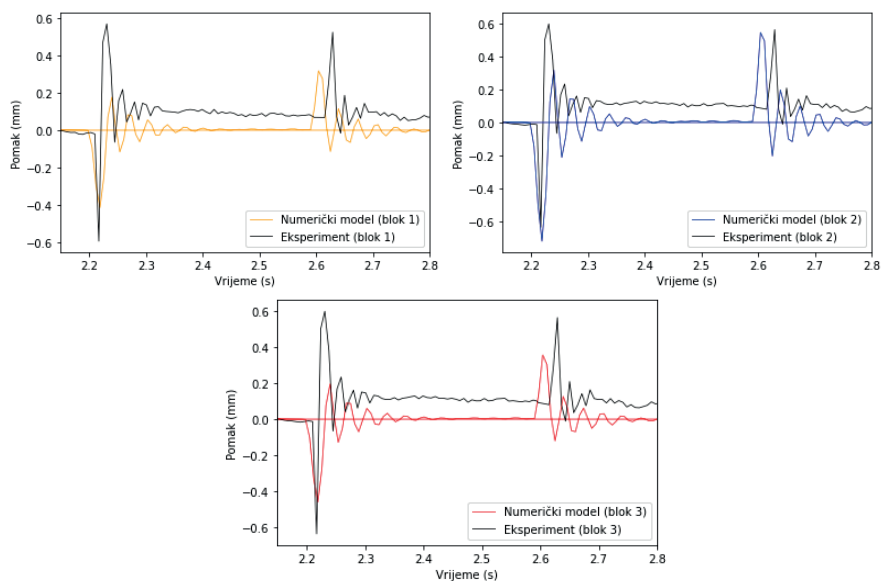
(b)

Slika 9. (a) Portal s dodanom masom korišten u dinamičkom eksperimentu, (b) dijagram pomaka podloge u vremenu tijekom nanošenja impulsne sile.

Promatrani su pomaci težišta svih blokova portala tijekom dinamičke pobude, pri čemu su za usporedbu numeričkog modela i eksperimenta korištene prosječna normalna tlačna krutost k_n i srednja vrijednost prigušenja ζ . Prigušenje sustava određeno je iz zasebnog ispitivanja slobodnih oscilacija korištenjem logaritamskog dekrementa amplituda, a iznosi $\xi = 0,137$. Za lakše razumijevanje prikaza dinamičkog odgovora, blokovi su označeni različitim bojama, dok su podaci eksperimenta u dijagramima prikazani crnom bojom.

Na Slici 10 prikazani su pomaci težišta blokova 1, 2 i 3 dobiveni numeričkim modelom i eksperimentom. Model zadovoljavajuće simulira stvarno ponašanje i amplitude pomaka. Primijećeno je da se impulsi u numeričkom modelu javljaju nešto ranije nego u eksperimentu, a

amplitude eksperimentalnih pomaka nisu zaglađene. Razlike u vremenu pojave impulsa mogu biti posljedica netočnosti optičkog mjernog sustava, koji rezultira šumom u izmjerenim pomacima baze. Ubrzanje uneseno u numerički model izračunava se kao dvostruka numerička derivacija izmjerenih podataka, što rezultira ne-fizikalnim skokovima u ubrzanjima i impulsima sile na samom početku, prije nego se oni pojavljuju u eksperimentu. Zbog nepravilnosti u mjerenju pomaka baze tijekom najbržih promjena, u dijagramu su korigirane pojedine točke kako bi se postigle glađe krivulje, no potrebno je dodatno filtrirati izmjerene podatke. Također, može se primijetiti da nakon prvog impulsa u eksperimentu imamo relativni pomak svih blokova u odnosu na bazu, što upućuje na to da je tijekom eksperimenta došlo do neželjenih pomaka (svega oko 0,15 mm) na prihvatu uzorka na bazu. To može biti posljedica zračnosti rupa koje su korištene za pričvršćenje uzorka na bazu ili gnječenja drva u okolini tih vijaka. Osim toga, numerički model se bazira samo na analizi ponašanja veziva samo u linearnom režimu, dok eksperimentalna ispitivanja pri djelovanju jakih impulsa mogu izazvati deformacije i naprezanja u vezivu koja izlaze iz domene linearno-elastičnog ponašanja.



Slika 10. Dijagram pomaka težišta bloka 1, 2 i 3 tijekom dinamičke pobude

5. Zaključak

U radu je uspješno razvijen i implementiran numerički model za analizu dinamičkog odziva blokovskog portalnog okvira s elastičnim kontaktnim vezama. Na temelju izvedenih jednadžbi gibanja, definiranih krutostnih matrica i karakteristika elastičnih spojeva, konstruiran je diskretni model s devet stupnjeva slobode, koji je implementiran u programskom jeziku Python koristeći Newmarkovu metodu vremenske integracije. Model uključuje geometrijsku konfiguraciju sustava, mehanička svojstva silikonskog veziva i globalne dinamike sustava.

Eksperimentalna ispitivanja provedena su u svrhu određivanja materijalnih parametara te validacije numeričkog modela. Usporedbom numeričkih i eksperimentalnih rezultata dobiven je zadovoljavajući stupanj podudarnosti, pri čemu su zabilježena određena odstupanja koja se u okviru ovog istraživanja nisu detaljno razmatrala. Unatoč tome, model pokazuje dostatnu razinu točnosti za pouzdanu simulaciju odziva portala izloženog dinamičkim pobudama.

Postignut je glavni cilj rada – razvoj validiranog numeričkog alata za analizu blokovskih sustava s elastičnim vezama, koji može poslužiti kao temelj za daljnja istraživanja. Budući razvoj modela usmjerit će se na uključivanje nelinearnih efekata u spojevima, analizu različitih geometrijskih konfiguracija i razvoj kriterija za procjenu graničnih stanja stabilnosti i oštećenja pri kompleksnijim dinamičkim pobudama.

Zahvala. Autori se zahvaljuju laborantu Dominiku Štroku, bacc. ing. aedif. iz Laboratorija za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci za pomoć prilikom pripreme i provedbe, čiji su rezultati prikazani u ovom radu. Istraživanje je provedeno kao dio projekta „Dinamička karakterizacija krutih blokova s kohezivnim kontaktima“ uniri-iskusni-tehnic-23-280 te projekta „Efikasno i robusno računalno modeliranje raslojavanja prostornih slojevitih konstrukcija“ uniri-iskusni-tehnic-23-300.

Literatura

- [1] Tomažević, M. (2000) Protupotresna obnova postojećih zidanih građevina. Građevinar, 52(11), 683-693.
- [2] Ozmen, C. Er Akan, A., Unay A. I. (2011) Proračun povijesne zidane zgrade. Građevinar, 63(05), 449-458.
- [3] Housner, G. W. (1963) The Behavior of Inverted Pendulum Structures During Earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53(2), 403-417.

- [4] Andreaus, U. & Casini, P. (1999) Dynamics of Three-Block Assemblies with Unilateral Deformable Contacts. Part 2: Actual Application. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28(12), 1637–1649.
- [5] Dhanasekar, M., Kleeman, P. W. & Page, A. W. (1985) Biaxial Stress–Strain Relations for Brick Masonry. *Journal of Structural Engineering*, 111(5), 1085–1100.
- [6] Lourenço, P. B. (2002) Computations on Historic Masonry Structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 4(3), 301–319.
- [7] Demirlioglu, K., Gonen, S., Soyoz, S. & Limongelli, M. P. (2020) In-Plane Seismic Response Analyses of a Historical Brick Masonry Building Using Equivalent Frame and 3D FEM Modeling Approaches. *International Journal of Architectural Heritage*, 14(2), 238–256.
- [8] Cundall, P. A. & Hart, R. D. (1992) Numerical Modelling of Discontinua. *Engineering Computations*, 9(2), 101–113.
- [9] Smoljanović, H., Živaljić, N. & Nikolić, Ž. (2013) Overview of the Methods for the Modelling of Historical Masonry Structures. *Građevinar*, 65(7), 689–703.
- [10] Forgács, T., Sarhosis, V. & Bagi, K. (2017) Minimum Thickness of Semi-Circular Skewed Masonry Arches. *Engineering Structures*, 140, 317–336.
- [11] Sarhosis, V., Lemos, J. V. & Bagi, K. (2019) Chapter 13 – Discrete Element Modeling. In: *Numerical Modeling of Masonry and Historical Structures: From Theory to Application*. Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, pp. 469–501.
- [12] Munjiza, A. (2004) *The Combined Finite–Discrete Element Method*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.
- [13] Smoljanović, H., Živaljić, N., Nikolić, Ž. & Munjiza, A. (2021) Numerical Simulation of the Ancient Protiron Structure Model Exposed to Seismic Loading. *International Journal of Architectural Heritage*, 15(5), 779–789.
- [14] Nikolić, Ž., Krstevska, L., Marović, P. & Smoljanović, H. (2019) Experimental Investigation of Seismic Behaviour of the Ancient Protiron Monument Model. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 48(10), 1064–1081.
- [15] Castellano, A., Elia, I., Fraddosio, A., Olivieri, C. & Piccioni, M. D. (2021) A New Experimental Approach for Small-Scale Dynamic Tests on Masonry Arches Aimed at Seismic Assessment. *International Journal of Masonry Research and Innovation*, 7(1–2), 1–21.
- [16] Čaušević, M. (2000) *Tehnička mehanika-Kinematika*. Školska knjiga, Zagreb, prvo izdanje.
- [17] Čeh, N. (2022) *Materijali iz kolegija Mehanika II*. Sveučilište u Rijeci. Građevinski fakultet.
- [18] Škec, L. (2022) *Materijali iz kolegija Otpornost materijala I*. Sveučilište u Rijeci. Građevinski fakultet.
- [19] Janković, A. (2024). *Numerička i eksperimentalna analiza dinamičkog odgovora blokovskog portala s elastičnim kontaktima (Završni rad)*. Rijeka:

Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet. Preuzeto s <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:157:229105>

- [20] Grbčić, S. (2022) Materijali iz kolegija Otpornost materijala II. Sveučilište u Rijeci. Građevinski fakultet.
- [21] Wilson, E. L. (2002) Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering. Computers and Structures, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA, third edition.
- [22] Chopra, A. K. (2020) Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering. Pearson Education Limited, Harlow, United Kingdom, fifth edition.
- [23] Građevinski fakultet u Rijeci, Katalog laboratorijske opreme, https://www.gradri.uniri.hr/files/Katalog_laboratorijske_i_terenske_opreme_GF_Rijeka.pdf, (2017).

ANALIZA MEHANIČKIH SVOJSTAVA BETONA OJAČANOG VLAKNIMA

ANALYSIS OF MECHANICAL PROPERTIES OF FIBER REINFORCED CONCRETE

Melchior Gnadekpa*, Ante Džolan**

Sažetak

Još od samog njegova otkrića beton je jedan od najkorištenijih građevinskih materijala u svijetu, ako ne i najkorišteniji. Danas postoje mnoge vrste betona, kao što su armirani beton (AB), beton visokih uporabnih svojstava (BVUS), beton visokih čvrstoća (BVČ), samo-zbijajući beton (SCC), laki beton, beton od recikliranog agregata, itd. Među ovim različitim vrstama betona, beton ojačan vlaknima (BOV) tema je brojnih istraživanja. Ova vlakna služe kao ojačanje betona na sličan način kao armaturne šipke – njima se premošćuju pukotine u betonu. Bez obzira na dobra svojstva betona kao materijala, on posjeduje neke slabosti kao što je mala vlačna čvrstoća. Ojačavanjem betona vlaknima nastoji se poboljšati njegovu vlačnu čvrstoću, te se u tu svrhu koriste različite vrste vlakana: čelična, staklena, sintetička, karbonska i prirodna vlakna. U ovom radu dan je pregled korištenja tih vlakana u svrhu dobivanja BVVS-a s osvrtom na njihov utjecaj na mehanička svojstva dobivenog materijala: tlačnu, vlačnu i savojnu čvrstoću.

Ključne riječi: betona visokih uporabnih svojstava (BVUS), vlakna za ojačavanje betona, tlačna čvrstoća, vlačna čvrstoća, savojna čvrstoća

Abstract

Since its invention, concrete has been one of the most used structural materials in the world, if not the most used. Today, there are many types of concrete, such as reinforced concrete (RC), ultra-high-performance concrete (UHPC), high-strength concrete (HSC), self-consolidating concrete (SCC), lightweight concrete, recycled aggregate concrete, etc. Among these different types of concrete, fiber-reinforced concrete (FRC) is the subject of numerous studies. These fibers serve as

* Nacionalni konzervatorij za umjetnost i obrt (CNAM), Reims, Francuska

E-mail: melchiorgdk@gmail.com

** Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: ante.dzolan@gradri.uniri.hr

reinforcement of concrete in a similar way like reinforcing bars – they bridge cracks in concrete. Regardless of the good properties of concrete as a material, it has some weaknesses such as low tensile strength. Reinforcing concrete with fibers aims to improve its tensile strength. Different types of fibers are used for this purpose: steel, glass, synthetic, carbon and natural fibers. This paper provides an overview of the use of these fibers for the purpose of obtaining UHPC with a focus on their influence on the mechanical properties of the resulting material: compressive, tensile and flexural strengths.

Key words: *ultra-high-performance concrete (UHPC), fibers for reinforcing concrete, compressive strength, tensile strength, flexural strength*

1. Uvod

Od njegova otkrića, beton je jedan od najčešće korištenih, ako ne i najkorišteniji građevinski materijal na svijetu. Danas postoje mnoge vrste betona, kao što su armirani beton (AB), beton visokih uporabnih svojstava (BVUS), beton velike čvrstoće (BVČ), samo-zbijajući beton (SCC), lagani beton, beton od recikliranih agregata, itd.

Među novijim je vrstama betona koje se razvijaju u području inženjerstva i beton ojačan vlaknima (BOV), tj. BVVS, koji je česta tema znanstvenih istraživanja [1-9]. Beton se ojačava vlaknima, na sličan način kao i običnom armaturom, u cilju minimalizacije mana koje ga karakteriziraju. Naime, beton, iako izvrstan i široko korišten materijal, ima svoje „karakterne“ nedostatke, a najveći mu je mala vlačna čvrstoća. Razlikujemo različite vrste vlakana koje se mogu koristiti za ojačavanje betona:

Čelična vlakna (Slika 1) značajno poboljšavaju vlačnu čvrstoću betona i čine ga izdržljivijim. Ova vrsta vlakana koristi se za montažne betonske proizvode, podove ili čak pločnike. Ova vlakna mogu biti različitih oblika, kako je prikazano na slikama 1.-a–c. Modul elastičnosti im je 200 GPa, dok im vlačna čvrstoća doseže i 1500 MPa.



a



b

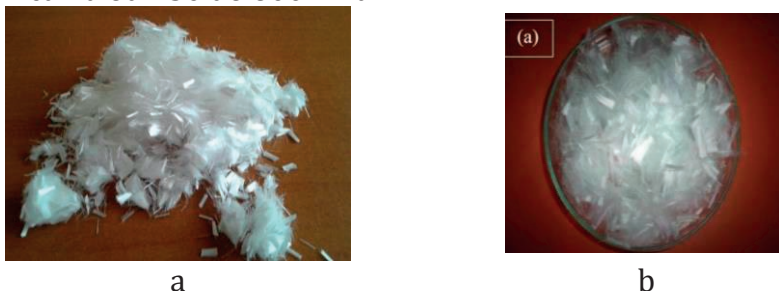


c

Slika 1. Različite vrste čeličnih vlakana: ravna vlakna [1] (a), vlakna s kukastim krajem [6] (b) i valovita vlakna [2] (c)

Staklena vlakna [3], kao i čelična vlakna, pridonose povećanju vlačne čvrstoće običnog betona. Štoviše, pomažu u sprječavanju korozije. Beton od staklenih vlakana često se koristi u arhitekturi i u dekorativne svrhe.

Sintetička vlakna [5-9] dobivaju su kemijskim tehnikama. Izrađene su od materijala kao što su polipropilen, najlon, poliester, itd. (Slika 2). Korištenje sintetičkih vlakana način je recikliranja plastike. Sintetička vlakna pomažu u poboljšanju otpornosti na pucanje, tj. žilavosti betona. Modul elastičnosti ovakvih vlakana kreće se u granicama od 3,5 do 4 GPa, dok im vlačna čvrstoća varira u granicama od 250 do 600 MPa.



Slika 2. Različite vrste sintetičkih vlakana: polivinil alkoholna vlakna [5] (a) i polipropilenska vlakna [6] (b)

Karbonska vlakna su izvrstan materijal s dobrim svojstvima (modul elastičnosti im je 230 GPa, a vlačna čvrstoća oko 4000 MPa). Kada se koriste s betonom, pružaju izniman omjer čvrstoće i težine te otpornost na koroziju. Koriste se za građevinske objekte poput mostova.

Prirodna vlakna potječu od biljaka i drveća (na primjer, sisal, juta ili kokos, banana - Slika 3 [4]). Ova vlakna imaju prednost jer su održiva i ekološki prihvatljiva alternativa u usporedbi s prethodnima, čak i ako pružaju niža mehanička svojstva (tako je modul elastičnosti vlakana od banane oko 3,5 MPa, dok im je vlačna čvrstoća oko 60 MPa).



Slika 3. Vlakna od banane [4]

Svaka vrsta vlakana koja se koristi u betonu ima svoje prednosti i nedostatke, prikladne za specifične primjene.

Osim povećanja vlačne čvrstoće, BOV omogućuje smanjenje pojave i širenja pukotina u betonu. Također povećava kapacitet disipacije energije i nosivost, bilo u slučajevima statičkog ili dinamičkog opterećenja.

BOV se izrađuje kao standardni beton, počevši od odabira prave vrste vlakana, miješanja različitih sastojaka betona (pijesak, agregati, cement, voda, vlakna, aditivi) u točnim omjerima, a zatim miješanja cjeline pomoću miješalice za beton.

U ovom radu dat će se prikaz mehaničkih svojstava betona armiranog vlaknima, slijedeći gornji sažetak. Za to se koriste rezultati nekoliko objavljenih znanstvenih radova i istraživanja.

2. Mehanička svojstva

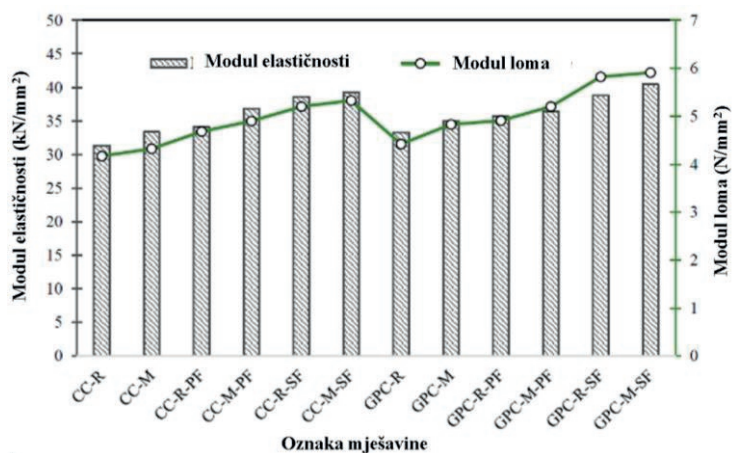
2.1 Moduli elastičnosti materijala

Za procjenu mehaničkog ponašanja betona ojačanog vlaknima koristit će se Youngov modul. Također poznat kao modul elastičnosti, Youngov modul pokazuje sposobnost deformiranja materijala, a daje vezu naprezanja i deformacije.

U [8] je ispitivan modul elastičnosti betona ojačanog čeličnim i polipropilenskim vlaknima. Ne uzimajući u obzir količinu vlakana, uočljivo je da dodavanje vlakana povećava vrijednost modula elastičnosti.

Modul elastičnosti običnog betona (CC-M) bio je 33,38 GPa, dok je kod beton ojačanoga polipropilenskim (CC-M-PF) vlaknima dobivena vrijednost od 36,86 MPa, te, konačno, kod betona armiranog čeličnim vlaknima (CC-M-SF) 39,3 MPa (Slika 4). Za pripremanje mješavina korišten je umjetno proizvedeni pijesak (eng. manufactured sand).

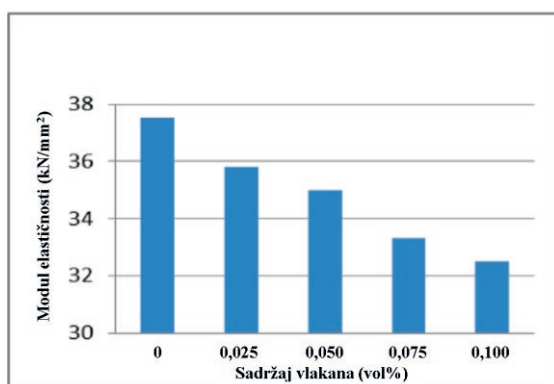
To dovodi do zaključka kako dodavanje vlakana u beton pridonosi povećanju njegova modula elastičnosti ovisno o vrsti vlakana. Uočeno je povećanje od oko 10 % za slučaj ojačavanja betona polipropilenskim vlaknima i gotovo dvostruko veće (18 %) za slučaj ojačavanja čeličnim vlaknima.



Slika 4. Rezultati promjene modula elastičnosti ovisno o vrsti vlakana objavljeni u [8]

U [9] je mjereno utjecaj različitih količina vlakana na nekoliko svojstava betona, kao što su tlačna, vlačna i savojna čvrstoća. Beton korišten za ispitivanja sadrži leteći pepeo, a sadržaj vlakana mu se kreće od 0 vol% do 0,1 vol%. Za ojačavanje betona korištena su poliesterska vlakna.

Uočeno je kako povećanje količine vlakana dovodi do smanjenja njegova modula elastičnosti (Slika 5). Iz Slike 5 vidljivo je kako beton ojačan s 0,1 vol% vlakana ima oko 13 % manji modul elastičnosti od običnog betona.



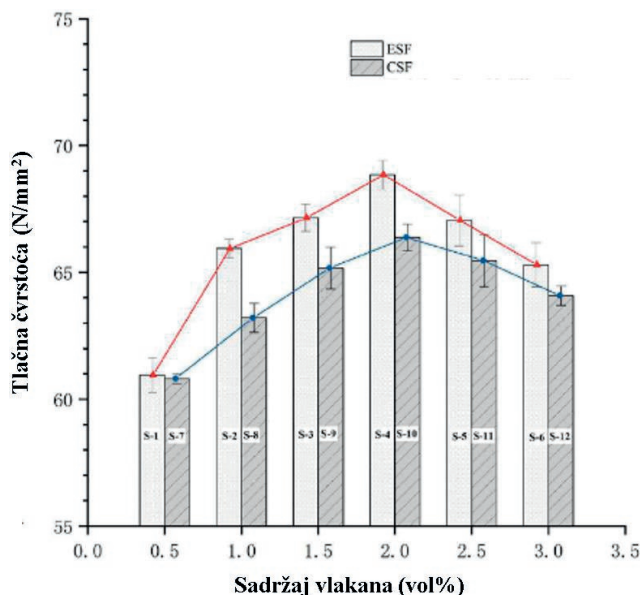
Slika 5. Rezultati promjene modula elastičnosti ovisno o količini vlakana objavljeni u [9]

Iz prethodne analize može se zaključiti kako varijacije modula elastičnosti uvelike ovise o vrsti korištenih vlakna.

2.2 Tlačna čvrstoća

Kada se radi o uobičajenim građevinskim materijalima, njihova tlačna čvrstoća jedan je od najvažnijih ispitanih parametara. U ovom se dijelu procjenjuje utjecaj dodavanja vlakana u betonsku mješavinu na tlačnu čvrstoću očvrstnalog betona.

U [6] su istraživači proučavali mješavine od čeličnih i polipropilenskih vlakana kako bi se odredila optimalna mješavina s obzirom na tlačnu čvrstoću materijala. Također su proučavali utjecaj nekoliko frakcija vlakana na tlačnu čvrstoću. Ovdje se promatraju dva tipa čeličnih vlakna: CSF-valovita čelična vlakna i ESF-čelična vlakna s kukama na krajevima. Slika 6 prikazuje rezultate istraživanja.



Slika 6. Rezultati promjene tlačne čvrstoće ovisno o količini vlakana objavljeni u [6]

Može se primijetiti kako se tlačna čvrstoća povećava povećavanjem sadržaja vlakana do određene vrijednosti (2 vol%) – tlačna čvrstoća betona ojačanog s 2 vol% vlakana je oko 13 % veća nego u betonu ojačanom s 0,5 vol% vlakana. Daljnje povećanje sadržaja vlakana dovodi do smanjivanja tlačne čvrstoće te se može zaključiti kako optimalni sadržaj

vlakana iznosi 2 vol% (za 3 vol% vlakana tlačna čvrstoća je oko 6 % manja nego za slučaj 2 vol% vlakana).

Slični rezultati dobiveni su u [10]. Optimalni sadržaj vlakana u mješavini ojačanoj čeličnim vlaknima iznosi 1,5 vol%, dok u mješavini ojačanoj polipropilenskim vlaknima iznosi 0,3 vol%. Tim vrijednostima sadržaja vlakana u mješavinama odgovaraju tlačne čvrstoće 54,44 MPa za beton ojačan čeličnim vlaknima i 51,25 MPa za beton ojačan polipropilenskim vlaknima. Ove vrijednosti predstavljaju prosječno povećanje tlačne čvrstoće od 25 % u usporedbi s običnim betonom.

Rezultati prikazani u [11] dobiveni su u istraživanjima provedenim na betonu ojačanom plastičnim vlaknima. Ova vlakna dobivena su reciklažom plastičnih boca iz restorana. Istraživači su primijetili da beton postiže svoju maksimalnu čvrstoću kad sadržaj vlakana iznosi 1,5 % sadržaja sitnog agregata. Isto se može reći i za staklena vlakna u [12], s rastom tlačne čvrstoće od 6 % u usporedbi s običnim betonom. Maksimalna postignuta tlačna čvrstoća je 33,51 MPa te odgovara betonskoj mješavini kod koje sadržaj staklenih vlakana iznosi 1,5 % sadržaja cementa.

Različite vrste vlakana mogu se miješati u istu betonsku mješavinu [1]. To je također učinjeno u [9]. Optimalna mješavina je 1 vol% čeličnih vlakana + 0,3 vol% polipropilenskih vlakana.

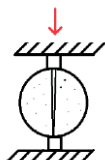
2.3 Vlačna čvrstoća

Iako pokazuje izvrsne karakteristike u pritisku, tj. tlaku, manjkavosti betona do izražaja dolaze pri pojavi zatežućih, tj. vlačnih naprezanja. Zato ga je u područjima gdje se očekuje pojava vlačnih naprezanja potrebno ojačati. U ovom djelu analizira se utjecaj dodavanja vlakana u obični beton na vlačnu čvrstoću cijepanjem.

Za izvođenje ovog ispitivanja izlije se cilindrični betonski uzorak. Uzorak se postavi vodoravno između dvije ploče, a zatim se na uzorak nanosi tlačno opterećenje. Na kraju ispitivanja uzorak se raspada na dva dijela uslijed neizravnog vlačnog naprezanja. Stvarna vlačna čvrstoća uzorka dobiva se pomoću izraza 1:

$$f_{ct} = \frac{2 \cdot P}{\pi \cdot L \cdot D}, \quad (1)$$

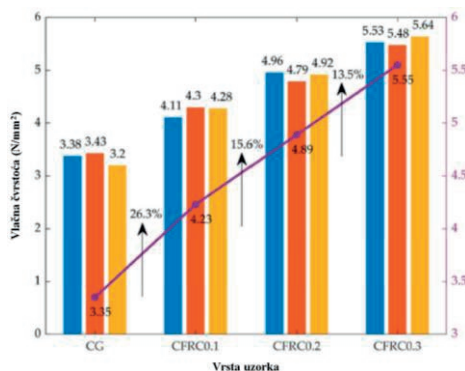
gdje je P maksimalna sila tlaka pri slomu, L duljina uzorka, a D njegov promjer.



Slika 7. Ilustracija ispitivanja vlačne čvrstoće cijepanjem

Postoji još jedan način ispitivanja vlačne čvrstoće betona – metoda direktnog ispitivanja vlačne čvrstoće. Za razliku od prethodne metode, u direktnom ispitivanju vlačne čvrstoće vlačno naprezanje se aksijalno nanosi na uzorak do njegova sloma. U nastavku se daje prikaz rezultata nekih istraživanja s obzirom na vlačnu čvrstoću betona ojačanog vlaknima.

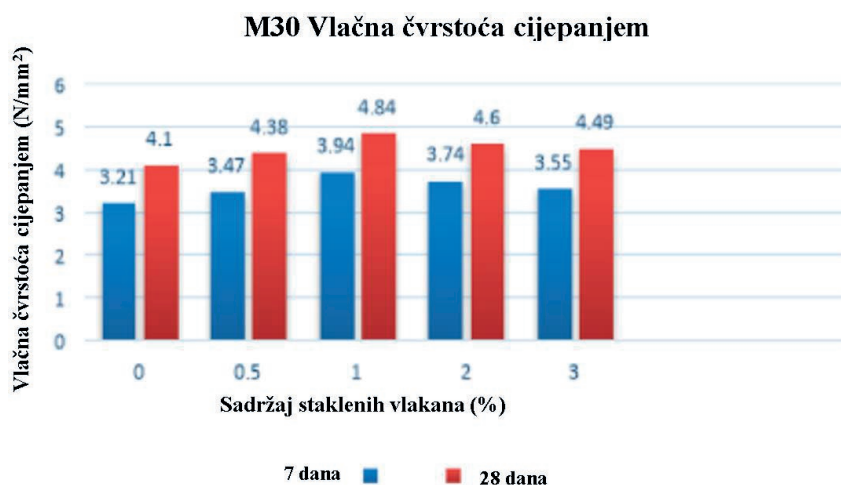
Vlačna čvrstoća betona ojačanog karbonskim vlaknima ispitivana je u [13]. Sadržaj vlakana u betonskoj mješavini povećan je s 0 na 0,3 vol%. Rezultati pokazuju porast vlačne čvrstoće s porastom sadržaja vlakana u mješavini. Vlačna čvrstoća običnog betona bila je 3,38 MPa, dok je dodavanjem 0,3 vol% karbonskih vlakana u mješavinu ona porasla na 5,53 MPa (Slika 8.). Prema tome, rast vlačne čvrstoće uslijed ojačavanja betona karbonskim vlaknima bio je 65 %.



Slika 8. Utjecaj sadržaja karbonskih vlakana na vlačnu čvrstoću betona [13]

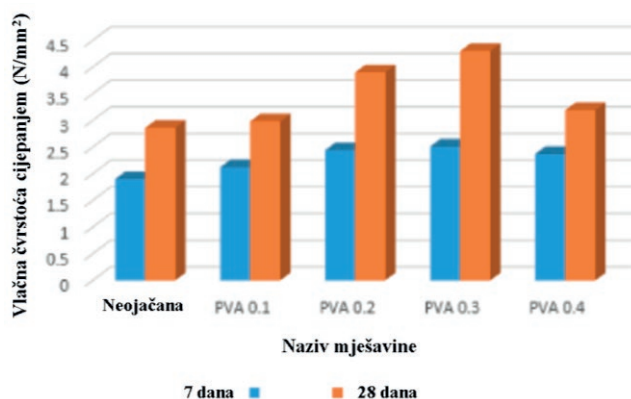
Gotovo isti zaključci mogli bi se dati za rezultate prikazane u [1]. Prirast vlačne čvrstoće iznosio je 40 % za slučaj ojačavanja betona čeličnim vlaknima velike čvrstoće, što je 25 % manje nego u slučaju ojačavanja karbonskim vlaknima.

Rezultati istraživanja provedenih kod betona ojačanih staklenim vlaknima dani su u [14] i prikazani na Slici 9. Uočava se povećanje vlačne čvrstoće cijepanjem kad sadržaj vlakana iznosi maksimalno 1 % sadržaja cementa u betonskoj mješavini. Daljnjim povećanjem sadržaja vlakana, vlačna čvrstoća se smanjuje. Najveća dobivena vrijednost vlačne čvrstoće za mješavinu M30 je 4,84 MPa (za 1 % vlakana), dok je čvrstoća mješavine ojačane s 3 % vlakana 4,49 MPa. Čvrstoća referentne, neojačane mješavine bila je 4,10 MPa. Stoga, prirast vlačne čvrstoće betona ojačanog s 1 % vlakana iznosi 18 % u odnosu na referentnu mješavinu. Povećanjem sadržaja vlakana s 1 na 3 % dolazi do gubitka vlačne čvrstoće od 7,20 %.



Slika 9. Utjecaj sadržaja staklenih vlakana na vlačnu čvrstoću betona cijepanjem [14]

Slično ponašanje (Slika 10) istraživači su uočili kod ojačavanja betona polivinil alkoholnim vlaknima [5]. Vlačna čvrstoća cijepanjem referentne mješavine bila je 2,7 MPa, dok dodavanjem vlakana raste. Za mješavinu kod koje je sadržaj vlakana 0,3 % sadržaja cementa čvrstoća je iznosila 4,1 MPa (rast oko 52 %). Daljnjim povećanjem sadržaja vlakana u mješavini vlačna čvrstoća opada te iznosi 3 MPa u mješavini ojačanoj s 0,4 % vlakana (pad čvrstoće za oko 27 % u odnosu na maksimalnu ostvarenu vrijednost).



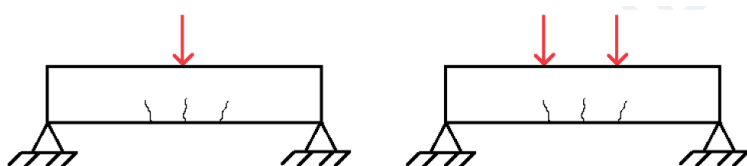
Slika 10. Utjecaj sadržaja polivinil alkoholnih vlakana na vlačnu čvrstoću betona cijepanjem [5]

U mješavini ojačanoj s 4 vol% vlakna od banane vlačna čvrstoća cijepanjem iznosila je 5,94 MPa, dok je kod referentne mješavine bila 4,03 MPa [4]. Prema tome, zabilježen je rast čvrstoće od 47 %. Daljnjim povećanjem sadržaja vlakana čvrstoća opada te u mješavini ojačanoj s 6 vol% vlakana iznosi 4,65 MPa, što predstavlja pad od 22 % u odnosu na mješavinu ojačanu s 4 vol% vlakana.

2.4 Čvrstoća na savijanje

Glavni konstruktivni elementi, kao što su grede, ploče, i sl., dominantno su opterećeni na savijanje, što čini čvrstoću na savijanje važnom karakteristikom pri projektiranju. Savijanje je zapravo kombinacija tlačnih i vlačnih naprezanja na element. Poznato je da obični beton ima veliku tlačnu i malu vlačnu čvrstoću.

Obično se čvrstoća na savijanje mjeri provođenjem ispitivanja savijanja u 3 ili 4 točke (Slika 11). Oba ova ispitivanja izvede se po istom principu: uzorak grede postavlja se na dva nosača i postupno opterećuje pomoću hidrauličke preše. Ta postavka stvara moment savijanja u gredi. Tijekom ispitivanja mjere se opterećenje i progib grede te se dobiveni rezultati koriste za određivanje njene čvrstoće na savijanje.



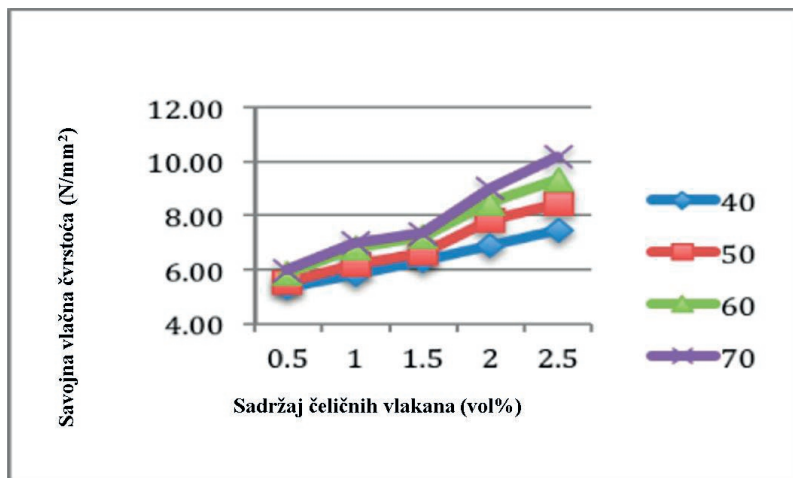
Slika 11. Shematski prikaz ispitivanja na savijanje

Rezultati istraživanja prikazani u [10] pokazuju rast čvrstoća na savijanje povećavanjem sadržaja vlakana u betonskoj mješavini. Ta činjenica je neovisna o starosti ispitanih uzoraka u trenutku ispitivanja (7 ili 28 dana), iako se uočava veći utjecaj kod uzoraka opterećenih pri starosti od 28 dana. Međutim, postoji optimalan sadržaj vlakana u mješavini čijim se premašivanjem gubi pozitivni utjecaj na povećanje čvrstoće na savijanje. Optimalni sadržaj vlakana u mješavini iznosi 1,5 vol% za beton ojačan čeličnim i 0,3 vol% za beton ojačan polipropilenskim vlaknima. Rezultati istraživanja objavljeni u [15,16] potvrđuju prethodno prezentirane rezultate. Povećanje čvrstoće na savijanje u odnosu na obični beton iznosi 34 % za beton ojačan čeličnim i 25 % za beton ojačan polipropilenskim vlaknima [10] (Tablica 1).

Tablica 1. Rezultati istraživanja čvrstoće na savijanje objavljeni u [10]
(BOČV-beton ojačan čeličnim vlaknima; BOPV-beton ojačan polipropilenskim vlaknima)

Vrsta betona	Sadržaj vlakana (vol%)	Čvrstoća na savijanje (N/mm ²)	
		7 dana	28 dana
Obični beton	0,0	3,58	4,64
BOČV	0,5	3,82	4,95
BOČV	1,0	3,88	5,42
BOČV	1,5	3,93	6,22
BOČV	2,0	3,85	5,82
BOPV	0,1	3,55	4,78
BOPV	0,2	3,64	5,26
BOPV	0,3	3,96	5,81
BOPV	0,4	3,80	5,56

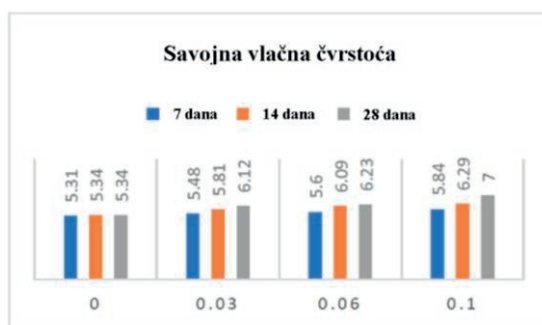
Na osnovi rezultata objavljenih u [17] uočljivo je kako čvrstoća na savijanje značajno raste povećanjem sadržaja vlakana po volumenu ispitanih uzoraka (Slika 12). To je zbog činjenice da čelična vlakna povećavaju elastičnost običnog betona čineći ga otpornijim na vlak.



Slika 12. Utjecaj sadržaja čeličnih vlakana na čvrstoću na savijanje [17]

Sa slike 12 može se vidjeti i utjecaj dimenzija vlakana (odnosa dužine (L) i promjera (D)) na savojnu čvrstoću očvrsnulog betona. Uočljivo je kako povećanje ovog odnosa pridonosi povećanju čvrstoće te za maksimalni odnos L/D prirast čvrstoće na savijanje iznosi oko 67 %.

Pozitivan utjecaj sadržaja vlakana na čvrstoću na savijanje zamijećen je i kod ojačavanja betona staklenim vlaknima. Tako rezultati objavljeni u [3] pokazuju porast čvrstoće na savijanje za 31 % u odnosu na obični beton u slučaj ojačavanja betona s 0,1 vol% staklenih vlakana. Najveća dobivena vrijednost čvrstoće na savijanje iznosila je 7 MPa (Slika 13).

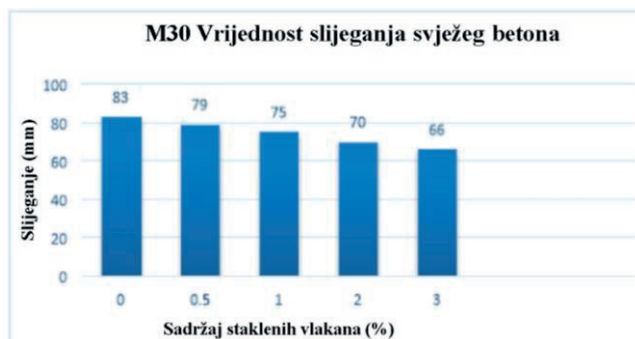


Slika 13. Utjecaj sadržaja staklenih vlakana na čvrstoću na savijanje [3]

2.5 Obradivost betona ojačanog vlaknima

Izraz „slump“ koristi se za opisivanje konzistencije svježe napravljenog betona prije nego očvrstne. Mjeri se „slump“-testom. Što je slijeganje svježeg betona manje, to mu je manja obradivost. Rezultati

istraživanja objavljeni u [3,14] pokazuju kako se slijeganje svježeg betonske mješavine smanjuje povećavanjem sadržaja vlakana u njoj. Oba ova rada istražuju betonsku mješavinu ojačanu staklenim vlaknima. Međutim, na osnovi rezultata objavljenih [9], isto je uočljivo u slučaju ojačavanja betona plastičnim vlaknima.



Slika 14. Utjecaj sadržaja staklenih vlakana na obradivost svježeg betonske mješavine [14]

3. Zaključak

Rad daje pregled literature koja obrađuje beton ojačan različitim vrstama vlakana, tzv. beton visokih uporabnih svojstava (BVUS). Iz korištene literature preuzeti su rezultati koji pokazuju utjecaj ojačavanja betona vlaknima na njegova mehanička svojstva i obradivost.

Analizirana mehanička svojstva su tlačna i vlačna čvrstoća te čvrstoća na savijanje. Bez obzira o kojoj od ovih čvrstoća bila riječ i bez obzira kojom vrstom vlakana je betonska mješavina ojačana, vidljivo je kako sadržaj vlakana u mješavini doprinosi rastu čvrstoće. Međutim, potrebno je biti oprezan s količinom vlakana u betonskoj mješavini. Za svaku vrstu vlakana vidljivo je kako postoji optimalan sadržaj vlakana, dok se njegovim daljnjim povećavanjem gubi njegov pozitivni utjecaj na čvrstoću, tj. dolazi do smanjenja postignute čvrstoće za slučaj optimalnog sadržaja.

Iz prikazanih rezultata je također vidljivo da sadržaj vlakana u betonskoj mješavini dovodi do smanjenja obradivosti same mješavine te je potrebno voditi računa i o tome aspektu pri odabiru količine vlakana u mješavini. Naime, svojstva BVVS znatno se mogu poboljšati usmjeravanjem vlakana u pravcu vlačnih naprezanja. Ovo se može postići 3D printanjem betona, ali samo u slučaju ako se osigura zadovoljavajuća obradivost betonske mješavine.

Literatura

- [1] Ammeri, A., Neifar, M. (2019) High Strength Fiber Reinforced Concrete with Local Materials. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 8/10, 403-406.
- [2] Athiappan, K., Subbaram, S. (2024) Strength and Durability Performance of Fibre Reinforced Pavement Quality Concrete with Copper Slag as Fine Aggregate. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, 11/7, 28-35.
- [3] Bishetti, P., Ameersohel, Basavannevva, N., Suhas, M., Veergangadhar, A. (2019) Glass Fiber Reinforced Concrete. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, 6/6, 23-26.
- [4] Chandre Mouli, K., Anitha, V., Sree Naga Chaitanya, J. (2018) Comparative Study of Banana Fibre Reinforced Concrete with Normal concrete. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, Special issue ICITSET, 73-76.
- [5] Devi, M., Kannan, L., Ganeshkumar, M., Venkatachalam, T.S. (2017) Flexural Behavior of Polyvinyl Alcohol Fiber Reinforced Concrete. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, 4/6, 27-30.
- [6] Gao, P., Xie, W., Ling, Y., Xu, H. (2025) Optimal Fiber Mix and Prediction Model for Compressive Strength of Hybrid Fiber Reinforced Concrete. *PLOS ONE* 20/2, e0318713.
- [7] Kayalvizhi, M., Sasikala, K., Vijaya Pandi, A. (2019) Test on the Behaviour of Hybrid Fiber Reinforced Concrete. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, Special issue ICTER, 56-63.
- [8] Porpadham, T., Thirugnanasambandam, S. (2024) Mechanical and Durability Performance of Fiber Reinforced Geopolymer Concrete. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, 11/11, 45-57.
- [9] Tharun, A.P.J., Mohan N.V., Aswathy, L.S., Sreekumar, S., Aparna A.V. (2018) Strength Characteristic Study of Polyester Fiber Reinforced Concrete. *International Journal of Engineering Research & Technology*, Special Issue, 1-6.
- [10] Vijaykumar. (2020) Comparison of Properties of Fiber Reinforced Concrete with Conventional Concrete. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 11/10, 174 – 182.
- [11] Sanjaykumar, B., Daule, S.N. (2017) Use of Plastic Fiber in the Concrete. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, 4/11, 4-7.
- [12] Priya, P. (2017) Experimental Study on Flexural Behaviour of Glass Fiber Reinforced Concrete Beam using Self Compacting Concrete. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 6/06 978-981.
- [13] Chen, Z.Y., Yang, J. (2021) Experimental Study on Dynamic Splitting Characteristics of Carbon Fiber Reinforced Concrete. *Materials*, 14, 94. <https://doi.org/10.3390/ma14010094>

- [14] Wala, M.S., Mire, A. (2019) Strength Characteristics of Glass Fiber Reinforced Concrete. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 8/06, 824-828.
- [15] Rai, R., Upreti, M., Nayal, M. (2018) Synthetic Fiber Reinforced Concrete. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 7/11, 67-67.
- [16] Verma, B. (2015) Use of Steel Fiber Reinforced Concrete (SFRC) over Plain Concrete for Shotcrete in Underground Tunneling. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, 2/7, 9-12.
- [17] Shweta, P., Kavilkar, R. (2014) Study of Flexural Strength in Steel Fibre Reinforced Concrete. *International Journal of Recent Development in Engineering and Technology*, 2/5, 13-16.

PROMJENE CIJENA ARMIRANOBETONSKIH RADOVA U REPUBLICI HRVATSKOJ: ANALIZA NA PRIMJERU PROJEKTA OBITELJSKE KUĆE

PRICE CHANGES OF REINFORCED CONCRETE WORKS IN THE REPUBLIC OF CROATIA: CASE STUDY OF A SINGLE-FAMILY HOUSE PROJECT

Ksenija Tijanić Štrok*, Tanja Polanc**

Sažetak

Tematika ovog rada vezana je za velike promjene i povećanja cijena u građevinskom sektoru koja su u razdoblju od 2019. do 2024. godine ozbiljno narušila realizaciju građevinskih projekata. U radu je izvršena analiza kretanja cijena armiranobetonskih radova za navedeno razdoblje na stvarnom primjeru građenja obiteljske kuće u Republici Hrvatskoj. Cilj rada obuhvaća utvrđivanje načina na koji tržišna kretanja utječu na cijene izdvojenih građevinskih radova, kao i utvrđivanje ključnih elemenata koji ponajviše doprinose promjenama u ukupnoj cijeni. Kao podloga za izračun cijena po godinama korištena je projektna dokumentacija odabranog projekta, a sama cijena je računata standardnom metodom dodatne kalkulacije s primjenom obračunskog faktora. Prema dobivenim rezultatima, unutar promatranog razdoblja, ukupna cijena armiranobetonskih radova narasla je za oko 93 %. Najveći udio u ukupnoj cijeni radova imaju troškovi materijala od čak 84 %. Uzroci promjena cijena obuhvaćaju razne geopolitičke, zdravstvene i prirodne nepogode, kao što su pandemija koronavirusa, potresi, rat u Europi i drugi posljedični događaji. Kako bi se posljedice nestabilnosti tržišta umanjile, predlaže se fleksibilnije ugovaranje radova, kao i kvalitetnije planiranje te upravljanje građevinskim projektima.

Ključne riječi: armiranobetonski radovi, nestabilnost tržišta, obiteljska kuća, promjene cijena

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: ksenija.tijanic@gradri.uniri.hr

** T&I Projekt d.o.o., Viškovo 39/8, 51216 Viškovo

E-mail: tanja.polanc1001@gmail.com

Abstract

The topic of this paper is related to major changes and price increases in the construction sector, which have seriously disrupted the implementation of construction projects in the period from 2019 to 2024. The paper analyses the price trends of reinforced concrete works for the specified period using a real example of the construction of a family house in the Republic of Croatia. This paper aims to investigate how market movements impact the prices of selected construction works, as well as to identify the key elements that contribute most to changes in the total price. The project documentation of the selected project served as the basis for calculating prices by year, and the price itself was determined using the standard additional calculation method, applying a calculation factor. According to the results obtained, the total price of reinforced concrete works increased by approximately 93 % within the observed period. The largest share of the total price of works is accounted for by material costs, which amount to as much as 84 %. The causes of price changes include various geopolitical, health and natural disasters, such as the coronavirus pandemic, earthquakes, war in Europe and other consequential events. To mitigate the effects of market instability, more flexible contracting of works, along with improved planning and management of construction projects, is recommended.

Key words: reinforced concrete works, market instability, family house, price changes

1. Uvod

Tijekom posljednjih nekoliko godina dogodile su se brojne okolnosti koje su dovele do neuobičajenih gospodarskih i tržišnih kretanja, a čija je posljedica bila opći rast cijena. Promjenama cijena izrazito je bio pogođen i građevinski sektor [1] jer obuhvaća izvođenje različitih projekata građenja koji su vrlo osjetljivi na promjene cijena građevinskog materijala, radne snage te rada strojeva.

Elementi građenja definirani su u ugovoru o građenju čiji je važan i sastavan dio cijena izvođenja radova. Navedena cijena obično proizlazi iz kalkulacije troškova u fazi planiranja na osnovu poznatih građevinskih radova koji se trebaju izvesti. Kalkulacija omogućuje procjenu izvedivosti građenja, jedna je od glavnih faktora za donošenje odluka u ranijim fazama projekta i baza je za učinkovito upravljanje troškovima tijekom izvođenja radova [2].

Faktori koji utječu na pojavu promjena cijena građevinskih radova su mnogobrojni, a mogu uključivati: tržišne uvjete, ponudu i potražnju, troškove prijevoza, troškove energije, troškove sirovina, troškove rada, nedostatak radnika, tečajeve valuta, uvozne carine, inflaciju, geopolitičke i zdravstvene okolnosti i dr. Građevinski projekti vrlo su osjetljivi na ovakve

uvjete i promjene jer se planovi izrađuju i ugovori sklapaju u vrijeme kada se ne mogu sa sigurnošću prognozirati oscilacije u cijenama građevinskih radova [3]. Neočekivane situacije mogu ugroziti uspješno izvršenje građevinskih projekata, pri čemu je povećanje cijena naročito zabrinjavajuće jer dolazi do prekoračenja planiranih troškova. Negativne posljedice prekoračenja troškova mogu uključivati neprofitabilnost projekta, kašnjenja, smanjenu produktivnost, pravne probleme, smanjenu kvalitetu izvedbe projekta, smanjenu kvalitetu kasnije pruženih usluga i sl. [4]. U slučaju velikih nestabilnosti cijena može doći i do prekidanja radova i sporova oko izvršenja ugovora jer ugovorne strane ne mogu ispuniti svoje obveze. Sve navedeno može dovesti do pada aktivnosti u građevinskom sektoru [3], a što zatim ima negativan utjecaj na cjelokupno gospodarstvo neke države.

Problematika povećanja cijena zadnjih nekoliko godina nije zaobišla ni Republiku Hrvatsku. Nestabilnost cijena je na hrvatskom području bila vrlo izražena, a u tome idu u prilog i javno objavljeni podaci [5]. Prema objavljenim podacima, inflacija koja predstavlja porast opće razine cijena [6] je od početka 2020. godine pa do početka 2025. godine iznosila 28,60 %. U istom razdoblju su cijene građevinskog materijala narasle za 27,50 %. Povećanje cijena u građevinskom sektoru utjecalo je i na poskupljenje kvadrata stambenog prostora, čineći stanovanje i vlasništvo nad domom sve manje dostupnim široj populaciji. U razdoblju od početka 2020. godine do početka 2025. godine prosječne cijene prodanih novih stanova narasle su za preko 47 % [5].

Zbog navedenih okolnosti i negativnih utjecaja javlja se potreba za detaljnom analizom tržišnih kretanja i njihovim konkretnim utjecajem na troškove i cijene građevinskih radova. Iako postoje razni podaci o općim trendovima u građevinarstvu, kao što su oni u okviru Državnog zavoda za statistiku [5], te podaci o kretanju cijena građevinskog materijala [3, 5, 7, 8], istraživanja i studije o promjenama cijena izdvojenih vrsta građevinskih radova nisu primijećena na području Republike Hrvatske. Ovaj će se rad konkretno usmjeriti na analizu promjena cijena armiranobetonskih radova na odabranom primjeru građevinskog projekta. Armiranobetonski radovi zbog svoje sveprisutnosti, količinskog i troškovnog udjela te strateškog značaja, predstavljaju ključan aspekt u građenju čije se promjene cijena trebaju pažljivo analizirati kako bi se bolje razumjela dinamika građevinskog tržišta.

Cilj ovog rada je analizirati promjene cijena armiranobetonskih radova na stvarnom primjeru građevinskog projekta u prethodnom višegodišnjem razdoblju. Kroz analizu i usporedbu troškova i cijena utvrdit će se kako su tržišna kretanja utjecala na cijene te će se identificirati ključni elementi

koji su najviše pridonijeli promjenama u ukupnoj cijeni radova. Rezultati analize omogućit će jasniji uvid u dinamiku cijena radova te mogu pomoći u donošenju informiranijih odluka u budućim projektima, kao i pridonijeti učinkovitijem upravljanju financijskim sredstvima.

Rad započinje uvodnim dijelom u kojem je istaknuta problematika i cilj rada. Drugo poglavlje opisuje korištene materijale i metode za provedbu analiza promjena cijena s detaljnim opisom odabranog građevinskog projekta. U trećem poglavlju su prikazani dobiveni rezultati gdje se osvrnulo na usporedbe ukupnih cijena kao i pojedinačnih kategorija troškova unutar dobivenih cijena. Četvrto poglavlje je diskusija rezultata gdje su se analizirali uzroci oscilacija cijena kao i mehanizmi i preporuke kako se s njima nositi. Zadnje, peto poglavlje, sadrži zaključna razmatranja.

2. Materijali i metode

Analiza promjene cijena armiranobetonskih radova kroz godine provest će se na način da će se računati cijene predmetnih radova na stvarnom primjeru građevinskog projekta izgradnje obiteljske kuće.

2.1. Opis obiteljske kuće

Projekt koji se promatra je obiteljska kuća koja je izgrađena u hrvatskom primorju, a koja se sastoji od prizemlja i kata. Tlocrtni gabariti za prizemlje kuće iznose $8,83 \times 11,53$ m, dok su za kat $8,75 \times 11,80$ m. Komunikacija između katova riješena je unutarnjim stubištem. Visina građevine iznosi 5,90 m. Uz obiteljsku kuću planira se gradnja i vanjskog bazena, septičke jame te manje ljetne kuhinje i roštilja. Tlocrtna površina kuće iznosi 92,09 m², dok je površina sa svim pomoćnim građevinama 137,35 m² [9]. 3D prikaz objekta prikazan je na Slici 1.



Slika 1. 3D prikaz objekta [9]

Nosiva konstrukcija objekta se uz opečne zidove velikim dijelom sastoji od armiranog betona. Armiranobetonski elementi uključuju temelje, nadtemelje, podne ploče, određene zidove, vertikalne i horizontalne serklaže, stupove, grede, nadvoje, stropnu ploču, stepenište te krovnu konstrukciju koja se izvodi kao ravna armiranobetonska ploča. Predmetni armiranobetonski radovi unutar sebe obuhvaćaju aktivnosti izrade oplata, armiranja i betoniranja pojedinog konstrukcijskog elementa, kako je navedeno u projektantskom troškovniku. Oplata je daščana, rađena na mjestu građenja, od daske debljine 24 mm. Za armiranje je predviđena armaturna šipka RA 400/500-2 te armaturne mreže MA 500/560. Primjenjivani beton je klase C25/30 (D_{max} 16), kojem se za potrebe gradnje bazena i septičke jame dodaje aditiv za vodonepropusnost. Dovoz betona se predviđa iz obližnje betonare automješalicama, a ugradnja betona je predviđena autobetonskom mobilnom pumpom. Vibriranje betona predviđeno je pomoću vibrirajućih uređaja [9].

Ukupno se u promatrani objekt ugrađuje oko 140 m³ betona te oko 10 t armature [9].

Odabrana obiteljska kuća predstavlja realan i reprezentativan primjer stambene gradnje, što je čini adekvatnom podlogom za analizu promjena troškova i cijena armiranobetonskih radova kroz vrijeme. Objekt je referentan jer obuhvaća elemente klasične i moderne gradnje, a raznolikost armiranobetonskih radova omogućuje sveobuhvatnu i detaljnu analizu promjena cijena. Predmetni radovi obuhvaćaju primjenu različitih materijala, strojeva i radnika, čime njihova analiza daje dobar uvid u promjene troškova u sve tri navedene kategorije. Armiranobetonski radovi su izdvojeni kao područje interesa jer obuhvaćaju najveći udio radova na ovakvim projektima te samim time čine i znatan udio u ukupnoj cijeni izvođenja radova.

Važnost armiranobetonskih radova za stambene građevinske projekte je vrlo izražena. Svi armiranobetonski elementi moraju se izvoditi prema proračunima, nacrtima, projektu betona te moraju ispunjavati temeljne zahtjeve za građevinu, što je u Republici Hrvatskoj definirano Zakonom o gradnji [10, 11].

2.2. Način izračuna cijena armiranobetonskih radova

Cijene će se u radu varirati u razdoblju od 2019. do 2024. godine. Za ovo razdoblje su dostupni javni cjenici građevinskih materijala, strojnog rada i radnika [8]. Također, u ovom razdoblju događale su se brojne tržišne promjene koje su utjecale na fluktuacije cijena građevinskih radova. Isto tako, 2019. godinu možemo promatrati kao zadnju godinu u

kojoj su tržišta bila stabilna, te prije nego li je došlo do izraženijih svjetskih kriza [3].

Kako bi se promatrale promjene cijena, izradit će se izvođački troškovnici armiranobetonskih radova za promatranih šest godina. Kao podloge koristit će se projektantski troškovnik i projektna dokumentacija promatranog projekta [9]. Projektantski troškovnik sadrži opise svih predviđenih građevinskih radova (stavki) s njihovim količinama. Izvođački troškovnik se izrađuje na način da se za svaku troškovničku stavku računa jedinična cijena. Jedinična cijena se zatim množi s predviđenom količinom rada te se na taj način dobije ukupna cijena svake pojedine stavke. Cjelokupnu cijenu armiranobetonskih radova čini zbroj prodajnih cijena svih pojedinih stavki. Cjelokupna cijena se izražava u neto i bruto iznosu.

Jedinična cijena stavki predstavlja cijenu po jedinici proizvoda ili usluge, a računa se analizom jediničnih cijena, i to metodom dodatne kalkulacije s primjenom obračunskog faktora [12]. Korištena formula (1) za proračun jedinične cijene je sljedeća [12]:

$$\text{Jedinična cijena} = (Am + As) + (B \times f) \text{ [€/m}^3, \text{€/m}^2, \text{€/t, ...]} \quad (1),$$

gdje su značenja oznaka sljedeća: Am – jedinični trošak materijala, As – jedinični trošak strojnog rada, B – jedinični trošak radne snage (radnika), f – obračunski faktor.

Obračunskim faktorom u prodajnu cijenu se uključuju indirektni troškovi gradilišta (režijski troškovi, zaštita na radu, osiguranja i sl.) te dobit izvođača radova. Trebalo bi ga odrediti za svako gradilište, a u većini slučajeva njegova vrijednost iznosi između 2,0 i 5,0 [12]. Za potrebe ovog rada, odabran je obračunski faktor vrijednosti 3,5, koji predstavlja srednju vrijednost između navedenog raspona.

Jediničnu prodajnu cijenu neke stavke dakle čine troškovi materijala, strojnog rada i radnika (direktni troškovi), indirektni troškovi te dobit izvođača [12].

Vrlo važan podatak za izračun jediničnih cijena stavki je utrošak pojedinih materijala, strojnog rada i radnika koji se u stavci koristi. Utrošak je količinski izraz trošenja materijala te radnih sati radnika i strojeva po jedinici proizvoda ili usluge [12]. Utrošci se usvajaju iz relevantnih normativa građevinskih radova te iz internih normativa poduzeća koji se oblikuju na temelju praćenja i analize izvedenih radova te iskustva. U ovom radu korišteni su općeprihvaćeni objavljeni normativi autora Gorazda Bučara [13]. U slučaju kad određene stavke nisu u potpunosti odgovarale opisima u objavljenim normativima, korišten je

najbliži Bučarov normativ, koji je iskustveno modificiran u interni normativ.

Podaci o cijenama materijala, strojnog rada i radnika preuzeti su iz Biltena „Standardna kalkulacija radova u visokogradnji“, kojeg objavljuje Institut IGH. Korišteni su Bilteni za III. kvartal od 2019. do 2024. godine [8] budući da su u vrijeme izrade rada postojali cjeloviti podaci za III. kvartal. Cijene su do 2022. godine bile izražene u hrvatskim kunama, pa je napravljena konverzija cijena u euro sa službenim tečajem od 7,53450 HRK/€ koji se koristio pri promjeni valute u Republici Hrvatskoj [14].

Cijene se u Biltenu određuju na temelju tržišnih cijena materijala, radnika i rada strojeva. Cijene materijala i radnika dobivaju se kao prosječne vrijednosti cijena prikupljenih na području Republike Hrvatske. Satnica strojeva dobivena je kalkulacijom na osnovu prikupljenih podataka kao što su cijene strojeva (od proizvođača), cijene sata stroja, godišnji fond sati, amortizacijska stopa, troškovi investicijskog i tekućeg održavanja i sl. [8].

Izračunom cijena armiranobetonskih radova po godinama dobit će se uvid u promjene cijena i troškova u promatranom razdoblju, kao i procjena iznosa kojeg su izvođači radova mogli tražiti za njihovo izvođenje u svakoj pojedinoj godini.

3. Rezultati

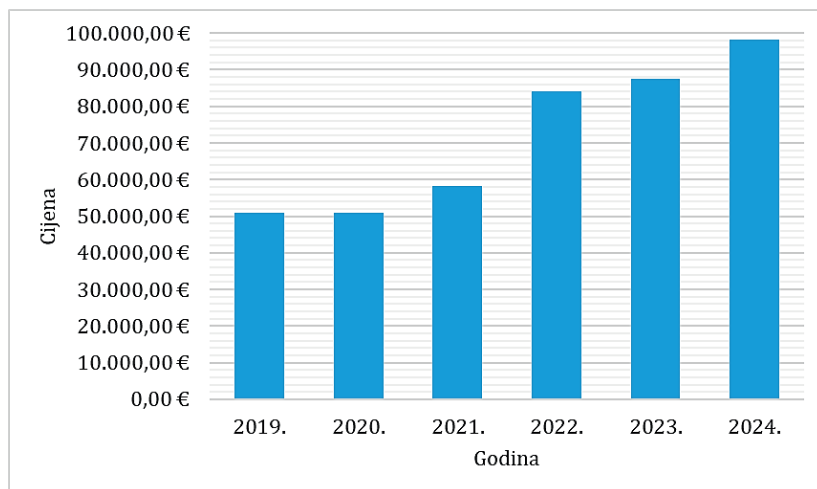
Dobivene ukupne cijene armiranobetonskih radova za odabrani objekt unutar promatranih godina su prikazane u Tablici 1.

Tablica 1. Ukupne cijene armiranobetonskih radova po godinama

Godina	Cijena neto (€)	Cijena bruto (€)
2019.	51.026,16	63.782,70
2020.	50.950,82	63.688,53
2021.	58.129,61	72.662,02
2022.	84.098,62	105.123,27
2023.	87.509,90	109.387,37
2024.	98.344,16	122.930,20

Bruto cijena predstavlja cijenu na koju je dodan porez na dodanu vrijednost (PDV). PDV za građevinske radove na razini Republike Hrvatske iznosi 25 % [15]. Dalje će se za usporedbu cijena i troškova koristiti neto vrijednosti, odnosno vrijednosti bez dodanog PDV-a, a kako bi se osigurala usporedivost podataka na istoj osnovi.

Kako bi se dobio jasniji uvid u promjene ukupnih cijena armiranobetonskih radova, dan je grafički prikaz cijena po godinama prikazan na Slici 2.



Slika 2. Grafički prikaz cijena po godinama

Pogledom na Tablicu 1 i Sliku 2 vidljivo je da su cijene tijekom 2019. i 2020. godine gotovo jednake, nakon čega slijedi uzlazni trend. Najveći skok u cijenama vidljiv je s prijelazom 2021. na 2022. godinu. Povećanje se nastavlja i u 2023. te 2024. godini. Ukupno gledajući, cijene radova su u promatranom razdoblju kontinuirano rasle, osobito u drugom dijelu analiziranog razdoblja.

Dalje su promatrane razlike u cijenama između pojedinih godina koje su prikazane u Tablici 2.

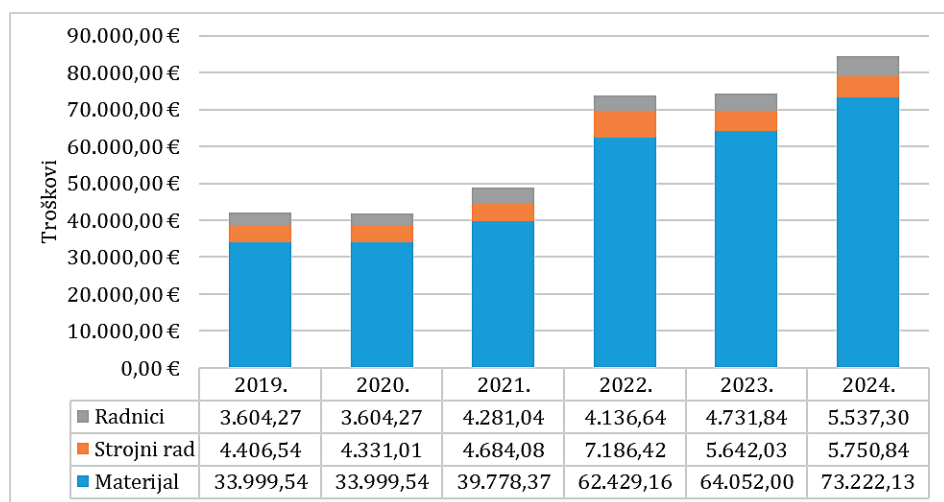
Tablica 2. Razlike u cijenama između godina

Godina	Razlika u odnosu na prethodnu godinu (€)	Razlika u odnosu na prethodnu godinu (%)
2019.	-	-
2020.	-75,34	-0,15
2021.	7.178,79	14,09
2022.	25.969,01	44,67
2023.	3.411,28	4,06
2024.	10.834,26	12,38

Gledajući cjelokupno šestogodišnje razdoblje, ukupna cijena armiranobetonskih radova narasla je s 51.026,16 € na 98.344,16 €, što je razlika od 47.318,00 €, odnosno 92,73 %.

Nakon usporedbe ukupnih cijena, razmatrat će se ukupni troškovi po kategorijama, odnosno gledajući pojedinačno materijale, strojni rad i radnike. Ukupni troškovi po kategoriji su dobiveni na način da su njihovi jedinični troškovi iz analize jediničnih cijena pomnoženi s pripadajućim količinama. To je napravljeno za svaku stavku, a ukupan trošak po kategoriji dobiven je zbrajanjem svih iznosa.

Pregled promjena troškova materijala, strojnog rada i radnika unutar promatranog razdoblja prikazan je na Slici 3.



Slika 3. Promjene iznosa troškova materijala, strojnog rada i radnika po godinama

Postotni prikaz razlika troškova za pojedine kategorije troškova između godina prikazan je unutar Tablice 3.

Tablica 3. Postotne razlike u troškovima materijala, strojnog rada i radnika između godina

Godina	Razlika u odnosu na prethodnu godinu (%)		
	Materijal	Strojni rad	Radnici
2019.	-	-	-
2020.	0,00	-1,71	0,00
2021.	17,00	8,15	18,78
2022.	56,94	53,42	-3,37
2023.	2,60	-21,49	14,39
2024.	14,32	1,93	17,02

Troškovi materijala su 2019. i 2020. godine jednaki, nakon čega slijedi uzlazni trend. Najveći skok vrijednosti materijala zabilježen je 2022. godine, gdje je vrijednost troškova u odnosu na prethodnu godinu narasla

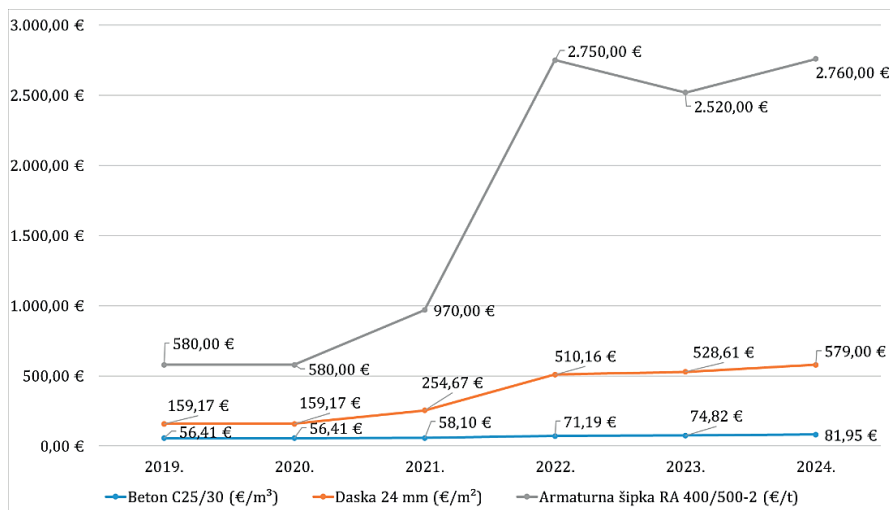
za 56,94 %. U odnosu na 2019. godinu i zadnju godinu promatranja troškovi materijala su narasli za čak 115,36 %.

Troškovi strojnog rada zabilježili su najveće fluktuacije, izmjenjujući pad i rast vrijednosti. Godine 2020. bilježi se blagi pad, nakon toga sljedeće dvije godine vrijednost strojeva raste. Najveći rast zabilježen je 2022. godine, kad je vrijednost u odnosu na prethodnu godinu narasla za 53,42 %. Zatim, 2023. godine troškovi opet padaju, i to za čak 21,49 %. Godine 2024. zabilježen je blagi rast. Promatrajući šestogodišnje razdoblje, vrijednost strojnog rada narasla je za 30,51 %.

Troškovi radnika 2020. godine ostaju isti kao i prethodne godine. Zatim se bilježi rast, osim 2022. godine gdje je primijećen pad vrijednosti radnika za 3,37 %. U promatranom razdoblju vrijednost radnika je narasla ukupno 53,63 %.

Slika 3 ukazuje na to da najveći udio u cijeni armiranobetonskih radova imaju troškovi materijala. Gledajući šestogodišnje razdoblje, prosječan udio troškova materijala u ukupnoj cijeni je 84 %. Prosječni troškovi strojnog rada su 9 %, a radnika 7 %, u ukupnoj cijeni armiranobetonskih radova.

S obzirom na značaj vrijednosti materijala u ukupnoj cijeni, u nastavku su izdvojeni glavni korišteni materijali unutar armiranobetonskih radova te su promatrane njihove cijene po jedinici proizvoda. Riječ je o betonu klase C25/30, oplatnoj daski debljine 24 mm te armaturnoj šipki RA 400/500-2. Promjene cijena kroz godine po jedinici proizvoda za izdvojene materijale prikazane su grafom na Slici 4.



Slika 4. Promjene cijena izdvojenih materijala po jedinici proizvoda

Iz Slike 4 je vidljivo da je najveće fluktuacije u cijeni imala armaturna šipka, čija je cijena u šest godina narasla za čak 375,86 %. Drvena daska također je imala veliko poskupljenje, i to u iznosu od 263,76 %. Kod cijene betona zabilježen je najmanji, ali značajan rast od 45,27 %. Kod svih materijala primijećeno je da su najveće promjene nastale u 2022. godini.

4. Diskusija

Svi prikazani rezultati ukazuju na velike nestabilnosti i složene poremećaje na tržištu u promatranom višegodišnjem razdoblju. Razlozi nestabilnosti i poremećaja te samim time i fluktuacija troškova i cijena su višestruki. Godine 2020. svijet je pogodila velika zdravstvena kriza izazvana pandemijom koronavirusa, a koja je snažno utjecala na građevinski sektor u Republici Hrvatskoj. Prekinuti su opskrbeni lanci, zatvorene su tvornice, ograničena su kretanja radnika, privremeno su zatvorena neka gradilišta, javlja se nedostatak radne snage zbog nemogućnosti uvoza strane radne snage i sl. [16]. Situacija se u Hrvatskoj dodatno komplicira uslijed potresa na području Zagreba početkom 2020. godine, te na području Petrinje krajem te iste godine. Kombinacija zdravstvene krize i prirodnih nepogoda uzrokovala je velike nestabilnosti tržišta, potražnja za građevinskim radovima raste, cijene rastu, nedostatak kvalificirane radne snage je izražen, obnova teče sporo i otežano, što je još više utjecalo na stanje građevinskog sektora u Hrvatskoj [17]. Rast cijena je kulminirao 2022. godine, kada dolazi i do političke krize u vidu rata Rusije i Ukrajine. Posljedice rata najviše se ogledaju u povećanju cijena energenata, sirovina i transporta na globalnom tržištu, što je posljedično dovelo do poskupljenja svih proizvoda i usluga, a posebno materijala kao što su željezo i drvena građa [18]. Uzroci za povećanje cijena građevinskih radova su se nizali jedni za drugim, a 2022. godina se posebno ističe inflacijom, što je vidljivo i u rezultatima ovog rada. Nakon 2022. dolazi do određene stabilizacije i manjeg rasta cijena proizvoda i usluga, no cijene su i dalje pod utjecajem svih prethodnih događaja. Nedostatak radne snage se pokušava riješiti uvozom jeftine radne snage iz trećih zemalja. Tržište je i dalje osjetljivo na vanjske poremećaje, promjene u globalnim opskrbnim lancima, inflaciju i sl.

Iako je za promatrano razdoblje vidljiv kontinuirani rast građevinskih proizvoda i usluga, u ovom radu se pokazalo da su u određenim godinama vrijednosti određenih kategorija troškova stagnirale ili čak i padale, kao što su kategorija radnika te posebno strojni rad koji u jednom trenutku bilježi pad od čak 20-ak % u odnosu na prethodnu godinu. Ovakav rezultat može se pripisati specifičnostima ovdje korištenog primjera kao i primijenjenim strojevima. Također, moguće je da su se neke cijene u

određenom trenutku počele vraćati u normalu, da je bila manja potražnja za korištenim strojevima, da su troškovi energenata oscilirali, ili da se ponuda na tržištu u danom trenutku jednostavno promijenila. Sve ovo ukazuje da su cijene strojnog rada osjetljive i da mogu znatno oscilirati, sve ovisno o tržišnim okolnostima.

Cijene građevinskih radova kao i obračun njihovih troškova i cijena važan su aspekt Ugovora o građenju. Ugovor o građenju definira se kao ugovor o djelu kojim se izvođač obvezuje izgraditi određenu građevinu, a naručitelj mu se za to obvezuje platiti određenu cijenu [19]. Na ispunjenje ugovora djeluju sve prije spomenute vanjske okolnosti i nestabilnosti koje uz troškove utječu i na rokove te cjelokupni uspjeh građevinskih projekata [20]. Pravni okvir cijene unutar ugovora o građenju najvećim je dijelom određen Zakonom o obveznim odnosima [19] i Posebnim uzancama o građenju [21]. Navedeni pravni okvir uređuje način utvrđivanja cijene građevinskih radova te mehanizme i uvjete pod kojima se ona može mijenjati. Najčešće primjenjivani mehanizmi promjene cijena iz Ugovora o građenju su indeksna klauzula i klizna skala [22], koje se dogovaraju između ugovornih strana. U Zakonu o obveznim odnosima [19] se navodi da je indeksna klauzula odredba ugovora u kojoj je iznos novčane obveze vezan za promjene cijena dobara, roba i usluga. Navedene promjene cijena se izražavaju indeksom cijena utvrđenim od strane ovlaštenog tijela. Ovlašteno tijelo u Republici Hrvatskoj je Državni zavod za statistiku [5], koji prati statističke pokazatelje vezane za različite aspekte društva i gospodarstva. Klizna skala je metoda u kojoj cijena ovisi o cijeni materijala, rada ili nekih drugih važnih čimbenika [19]. Promjene cijena se preračunavaju pomoću unaprijed definirane formule koja sadrži udjele pojedinih stavki u ukupnoj cijeni radova [23].

Izbor između zaštitnih klauzula je na ugovornim stranama koje s obzirom na specifičnosti ugovora i prirodu građevinskih radova trebaju procijeniti koja im u tom smislu bolje odgovara.

Brze i nagle promjene cijena građevinskih radova u prethodnom višegodišnjem razdoblju bile su posebno problematične za već sklopljene ugovore bez ugovorenih zaštitnih klauzula, a koji u trenutku poremećaja cijena još nisu bili ispunjeni. Posebno su bili pogođeni ugovori o građenju u sustavu javne nabave zbog nefleksibilnog ugovaranja cijena [18]. Kako bi se takvi ugovori iznijeli do kraja, na razini Republike Hrvatske su donesene određene mjere. Vlada Republike donijela je Zaključak o ublažavanju posljedica globalnog poremećaja na tržištima građevinskih materijala i proizvoda koji omogućuje korekciju troškova postojećih građevinskih ugovora s dogovorenom fiksnom cijenom [24]. Za postupke javne nabave omogućuje određivanje varijabilne cijene, kao i načine i uvjete promjene

cijene tijekom izvršenja ugovora. Hrvatska gospodarska komora također je izradila smjernice u kojima se daju okviri i preporuke naručiteljima i izvođačima u okolnostima mogućeg priznavanja razlike u cijeni građevinskih radova [25].

Analiza promjena cijena armiranobetonskih radova u ovom radu je pokazala da cijene mogu rasti brzo i nepredvidivo, što predstavlja ozbiljan rizik za planiranje troškova i uspješnost građevinskih projekata. Iako su cijene promatrane na godišnjoj razini, evidentno je da su se promjene cijena događale iz mjeseca u mjesec, pa čak i u kraćim vremenskim razdobljima. Zbog toga na ovakve tržišne oscilacije nisu imuni ni manji projekti kraćeg trajanja, kao što je i onaj ovdje promatran. Kako bi se posljedice negativnih utjecaja promjena cijena smanjile, potrebno je primijeniti strategije za njihovo ublažavanje. Prvi korak u pripremi izvođenja građevinskih radova je planiranje i optimiziranje njihova izvođenja kroz traženje i postizanje ravnoteže između ključnih elemenata građenja kao što su troškovi, vrijeme, resursi i kvaliteta. Kvalitetno planiranje radova i točna procjena troškova, uz uzimanje u obzir rizika promjene cijena, bitni su aspekti uspješnog izvođenja građevinskog projekta. Planiranje je ključ adekvatnog korištenja ljudskih i materijalnih resursa. Planiranjem se izbjegavaju poteškoće, neizvjesnosti, rizici, neučinkovito korištenje resursa i sl. Kvalitetni planovi pružaju bolji pregled proračuna, pomažu u kontroliranju i upravljanju troškovima te omogućuju adekvatno korištenje raspoloživih novčanih sredstava [3]. Dodatno, optimizacijom projektnih rješenja korištenjem digitalnih alata moguće je preciznije planirati i pravovremeno reagirati na promjene, čime se smanjuje rizik od prekoračenja troškova. Jedna od mogućih mjera ublažavanja promjena cijena je uključivanje spomenutih zaštitnih klauzula u ugovore o građenju, koje omogućuju promjene cijena ovisno o tržišnim kretanjima. Njihova je funkcija štititi i izvođače i naručitelje. Također, redovito praćenje indeksa cijena, sklapanje dugoročnih ugovora s dobavljačima te fleksibilnije planiranje i upravljanje proračunom s predviđenim rezervama doprinose boljoj financijskoj stabilnosti projekta.

Promatrajući trenutno stanje u 2025. godini u Republici Hrvatskoj, bilježi se rast građevinskog sektora, kao i obujma građevinskih radova. Glavni problemi i dalje ostaju rastući troškovi građenja te sve veći nedostatak radne snage [26]. Kako bi se s ovim pojavama nosilo, predlaže se primjena gore spomenutih mjera.

5. Zaključak

Ovim radom analizirane su promjene cijena armiranobetonskih radova na stvarnom primjeru obiteljske kuće u prethodnom višegodišnjem

razdoblju od 2019. do 2024. godine. Izvršena analiza je omogućila jasniji uvid u dinamiku cijena građevinskih radova na području Republike Hrvatske.

Ključni rezultati rada su sljedeći:

- ukupna cijena armiranobetonskih radova narasla je za 92,73 %,
- najveći udio u ukupnoj cijeni armiranobetonskih radova (84 %), a samim time i najveći utjecaj na cijenu imaju troškovi građevinskog materijala,
- od izdvojenih građevinskih materijala, najveći porast cijene zabilježen je kod armaturne šipke čija je cijena narasla za 375,86 %.

Ovako izražen rast cijena pojedinih radova i materijala bitno utječe na ukupne troškove i cijenu građenja te zahtjeva pažljivo planiranje i usklađivanje proračuna u fazama planiranja i izvođenja radova. Promatrajući vrijednosti materijala, strojnog rada i radnika kroz godine primijećene su oscilacije i nejednoliko kretanje, no također je vidljivo kako se zadnjih godina tržište pokušava prilagoditi nepredviđenim okolnostima. Uzroci nestabilnosti tržišta su višestruki, a uključuju zdravstvene i političke krize, prirodne nepogode, potražnju za radnom snagom, povećanje cijena energenata i sl. Kako bi se posljedice promjene cijena građevinskih radova donekle ublažile, predlaže se primjena fleksibilnog ugovaranja s mogućnošću korekcija cijena. Također, kako bi se ublažili budući financijski rizici, ključna su što preciznija planiranja troškova, kao i učinkovito upravljanje tijekom trajanja projekta.

Iako su rezultati ovog rada značajni, postoje određena ograničenja rada kojih treba biti svjestan pri interpretaciji rezultata. Uzorak je ograničen samo na jedan objekt, što ograničava generalizaciju rezultata na druge objekte i vrste projekata. Podaci o cijenama se odnose samo na hrvatsko tržište te se stoga dinamika cijena ne može primijeniti na neka druga područja. Izvršena analiza kretanja cijena obuhvaća razdoblje od 2019. do 2024. godine, što ne prikazuje trendove izvan tog razdoblja. Fokus rada je isključivo na armiranobetonskim radovima, a ostale vrste radova nisu pokrivene analizom, što može utjecati na cjelokupnu sliku i dinamiku troškova i cijena građenja.

Kako bi se istaknuta ograničenja rada prevladala u budućim istraživanjima, potencijalno se može proširiti uzorak promatranih objekata, proširiti geografsko područje obuhvaćeno analizom, u analizu uključiti i druge vrste građevinskih radova i materijala te detaljnije istražiti

strategije za optimizaciju troškova kao i učinkovitije upravljanje projektima.

Zahvala. Rad je proizašao iz završnog rada studentice Tanje Polanc pod naslovom „Analiza promjena cijena armiranobetonskih radova na primjeru stambene gradnje“, obranjenog 15.07.2025. na Građevinskom fakultetu u Rijeci.

Literatura

- [1] Markovinović, H. (2023) Izmjena cijene u ugovoru o građenju. Zbornik radova Pravnog fakulteta u Splitu, 60 (2), 495-512.
- [2] Tijanić Štrok, K. (2024) The Path to More Efficient Construction: Mathematical Model for Cost Estimation in High-Rise Construction. U: Glavaš, J., Papac, N., Erceg, A., ur. Interdisciplinary Management Research XX. Osijek, 303-323.
- [3] Tijanić Štrok, K., Šopić, M., Car-Pušić, D., Marović, I. (2022) Public Administrators' Maintenance Management Practices under the Impact of Material Price Fluctuations. 6th IPMA SENET Project Management Conference "Digital Transformation and Sustainable Development in Project Management". Cavtat, 92-109.
- [4] Lovrinčević, M., Vukomanović, M. (2022) Reasons for Cost Overruns in the construction of highways in Croatia. U: Završki, I., Cerić, A., Vukomanović, M., Huemann, M., Vlahov Golomejić, R. D., Sigmund, Z. ur. 15th International Conference Organization, Technology and Management in Construction. Cavtat, 192-206.
- [5] Državni zavod za statistiku. <https://dzs.gov.hr/> (18.06.2025.)
- [6] Hrvatska enciklopedija. <https://www.enciklopedija.hr/clanak/inflacija> (18.06.2025.)
- [7] Hrvatska gospodarska komora. Index cijena građevinskog materijala. <https://www.hgk.hr/indeksi-cijena> (28.08.2025.)
- [8] Standardna kalkulacija radova u visokogradnji (2019. – 2024.). <https://mpgi.gov.hr/o-ministarstvu/djelokrug-50/procjena-vrijednosti-nekretnina-8292/standardna-kalkulacija-radova-u-visokogradnji-2019-2024/10667> (20.06.2025.)
- [9] T&I PROJEKT d.o.o. (2021) Arhitektonski projekt – Obiteljska kuća i pomoćna građevina – Bazen i ljetna kuhinja sa roštiljem
- [10] Tijanić Štrok, K., Car-Pušić, D., Marfan, F. (2023) Time Deviation Analysis of the Baseline Plan on the Case Study: Implementation of Reinforced Concrete Works on a School Construction Project in the Republic of Croatia. e-ZBORNIK elektronički zbornik radova Građevinskog fakulteta, 26(2023), 62-73.

- [11] Zakon o gradnji, NN 153/13, 20/17, 39/19, 125/19, 145/24. <https://www.zakon.hr/z/690/zakon-o-gradnji> (20.06.2025.)
- [12] Katavić, M. (2009) Osnove ekonomike za graditelje. Zagreb: Hrvatska sveučilišna naklada, Hrvatska udruga za organizaciju građenja.
- [13] Bučar, G. (2003) Normativi i cjenovnici u graditeljstvu, Omišalj: ICG; Rijeka: Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci.
- [14] Izračun konverzije kuna u eure. <https://www.fina.hr/euro-kalkulator> (20.06.2025.)
- [15] Oporezivanje građevinskih usluga u RH. <https://www.rrif.hr/oporezivanje-gradevinskih-usluga-u-rh-2123-vijest/> (20.06.2025.)
- [16] Bogdan, A. (2020) Utjecaj koronavirusa na građevinski sektor u Hrvatskoj. Građevinar, 72 (2020.)4, 379-383.
- [17] Lukić, F. (2023) Utjecaj povećanja cijena sirovina na troškove u sektoru građevinarstva. Završni rad. Zatrešić: Veleučilište s pravom javnosti Baltazar Zatrešić.
- [18] Bogdan, A. (2022) Zbog snažnog porasta cijena upitna provedba investicijskih projekata. Građevinar, 74 (2022.)4, 320-322.
- [19] Zakon o obveznim odnosima, NN 35/05, 41/08, 125/11, 78/15, 29/18, 126/21, 114/22, 156/22, 155/23. <https://www.zakon.hr/z/75/zakon-o-obveznim-odnosima> (21.06.2025.)
- [20] Marelja, J. (2024) Cijena kod ugovora o građenju. Diplomski rad. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Pravni fakultet.
- [21] Posebne uzance o građenju, NN 137/2021. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2021_12_137_2270.html (21.06.2025.)
- [22] Čurić, A. (2022). Promjena cijene kod ugovora o građenju. Diplomski rad. Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek.
- [23] Milotić, I. (2021) Zakon o obveznim odnosima i izmjene cijena kod ugovora o građenju. Pravo i porezi, 10(2021.), 12-18.
- [24] Zaključak Vlade Republike Hrvatske klasa: 022-03/22-07/228, urbroj: 50301-05/16-22-9 od 21. lipnja 2022. o ublažavanju posljedica globalnog poremećaja na tržištima građevinskih materijala i proizvoda, NN 71/2022. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2022_06_71_1049.html (20.06.2025.)
- [25] Hrvatska gospodarska komora (2022) Smjernice za provedbu postupaka priznanja razlike u cijeni na temelju ugovora o građenju u slučajevima porasta cijena pojedinih građevinskih materijala i proizvoda, primjenom čl. Zakona o obveznim odnosima uz primjenu Zakona o javnoj nabavi. Zagreb: Hrvatska gospodarska komora.
- [26] Budućnost građevine: Radna snaga i rastući troškovi gradnje glavni izazovi. <https://mpgi.gov.hr/vijesti-8/buducnost-gradjevine-radna-snaga-i-rastuci-troskovi-gradnje-glavni-izazovi/18270> (26.06.2025.)

FAKULTETSKI GODIŠNJAK

Studenti koji su diplomirali (2024./2025.)

Prijediplomski sveučilišni studij – univ. bacc. ing. aedif.

Martin Skledar	Sandra Pribanić	Eva Bastalec
Laura Magdić	Tea Babić	Adrian Bratulić
Marina Fonio	Katja Bakija	Rene Silconi
Sara Jurdana	Alma Mahmić	Marijan Šimičić
Elena Biletić	Elena Mešanović	Luka Ritoša
Verena Krastić	Luana Milanović	Dorian Kanciani
Sara Antolović	Sara Kutić	Marko Jurišević
Tara Begić	Ivan Jurčević	Ivan Babić
Melany Šabanagić	Zlatko Toljanić	Marta Šarac
Mateo Ilić	Rajna Radešić	Ana Osmanagić
Lara Fabris	Lea Maružin	
Tamara Blagec	Karla Draganić	
Ana Milović	Franko Šorić	
Vida Škorjanec	Lucija Krapčiček	
Leona Petohlep	Leonardo Pehar	
Valentina Podgorski	Anja Mikić	
Petra Dragčević	Caterina Simonelli	
Anamaria Buršić	Romina Licul	
Marko Ivošević	Tea Belančić	
Edin Crnalić	Ivan Pelčić	
Sara Petrović	Daniel Dujmović	
Martina Tonković	Ivan Marković	

Diplomski sveučilišni studij – univ. mag. ing. aedif.

Nika Perić	Dora Štiberc
Marina Rakovac	Vlatka Franjić
Petar Leko	Nika Kamenar
Antonio Marić	Katja Kučiš
Leonardo Rudan	Antonio Križanac
Dino Pršić	Lovro Korpar
Luka Tulić	Erik Kovaček
Ivana Bošnjak	Ivana Andričević
Tea Lusičić	Ivan Matoković
Neira Mušić	Tin Filipović
Josip Zorčić	Leonarda Vuksan

Prijediplomski stručni studij – bacc. ing. aedif.

Tea Kelek	Roko Mrđa	Lea Bilić
Josip Špehar	Ivana Blagaj	Borna Kovačević
Ivor Martić	Dominik Miškić	Robert Marelja
Dora Nekić	Lucijan Marović	Karlo Maržić
Korina Zupan	Ela Harambašić	Antonio Andrijević
Ajša Tutić Khalaf	Viktor Škahić	Ivana Kukuljan
Nikolina Moguš	Marina Tomić	Marina Jurenec
Katia Ivanišević	Domagoj Kirin	Bartol Blažanović
Dorian Nagy	Marin Oklobdžija	Matej Pavičić
Diego Bakunić	Ene Letić	Andrija Matok
Petar Marjanović	Petar Srblićinović	Melany Zrinščak

Domagoj Dizdar	Matko Jozić	Roko Matijević
Matej Mičetić	Mateo Jakara	Karlo Bogović
Matija Jurčević	Toni Marko Gojanović	Leo Kerman
Tanja Polanc	Gianna Orlović	Dorotea Šindilj
Stjepan Šimić	Marko Zbašnik	Lorena Golub
Matea Benčić	Matea Delija	Armen Hoti
Dominik Samaržija – Hranilović		

Diplomski stručni studij – mag. ing. aedif.

Petra Ugričić

Samir Haušić

Stefan Šverko

Ivana Vrdoljak

Ivan Saftić

Marko Žilić

pripremila Nilda Zelenika

Nagrade i priznanja studentima

Na Svečanoj sjednici Fakultetskog vijeća, dekan fakulteta izv. prof. dr. sc. Mladen Bulić dodijelio je **priznanja i pohvale studenticama i studentima** koji su ostvarili poseban uspjeh na studiju u **ak. god. 2023./2024.**:

Prijediplomski sveučilišni studij Građevinarstvo

Marina Depikolozvane – najbolji uspjeh na 1. godini studija

Sara Antolović – najbolji uspjeh na 2. godini studija

Alen Babajić – najbolji uspjeh na 3. godini studija

Alen Babajić – najbolji ukupni uspjeh na studiju

Diplomski sveučilišni studij Građevinarstvo

Lucija Žagrić – 1. godina, smjer Urbano inženjerstvo

Lana Morić – 2. godina, smjer Urbano inženjerstvo

Denis Martinčić – 2. godina, smjer Hidrotehnika

Ivan Sindičić – 2. godina, smjer Konstrukcije

Denis Martinčić – najbolji ukupni uspjeh na studiju

Prijediplomski stručni studij Građevinarstvo

Karlo Vugrin – najbolji uspjeh na 1. godini studija

Specijalistički diplomski stručni studij Građevinarstvo

Gabrijela Franolić – najbolji uspjeh na 2. godini studija

Gabrijela Franolić – najbolji ukupni uspjeh na studiju

Doktorski studij Građevinarstvo

Jan Tomec – najbolji ukupni uspjeh na studiju

Na Svečanoj sjednici Građevinskog fakulteta dodijeljene su nagrade za **najbolje diplomske radove izrađene u akademskoj godini 2023./2024.** u suradnji s tvrtkama alumnima Fakulteta za različita područja građevinarstva:

Marijan Pil: Analiza razvoja razine podzemne vode u umanjenom modelu klizišta, Geotehnika, donacija tvrtke Monterra d.o.o.

Simona Ivić: Rekonstrukcija poluportalne dizalice u luci Porto Baroš, Konstrukcije, donacija tvrtke GP KRK d.d.

Ivan Vukadin: Analiza utjecaja polimernih i vunених vlakana na mehanička svojstva betona, Materijali, donacija tvrtke Goran graditeljstvo d.o.o.

Ivan Sindičić: Numerička i eksperimentalna analiza seizmičkog odgovora zidanih konstrukcija s elastičnim vezivom, Tehnička mehanika, donacija tvrtke Goran graditeljstvo d.o.o.

Tina Drašković: Idejni projekt spoja županijskih cesta ŽC 5103 i ŽC 5081 u Labinu, Prometnice, donacija tvrtke Rijekaprojekt d.o.o.

Dominik Želežić: Projektna analiza odvodnje sanitarnih otpadnih voda grada Ivanca, Hidrotehnika, donacija tvrtke Rijekaprojekt – Vodogradnja d.o.o.

Dragan Valković: Analiza izvornog urbanističkog plana Podlabina, Stručni diplomski studij, donacija tvrtke Građevinski fakultet u Rijeci





Ostale pohvale studentima

Sara Petrović dobitnica je nagrade rektora za izvrsnost i nagrade Izjednačavanje mogućnosti za najbolju studenticu s invaliditetom u ak. god. 2023./2024.

Titulu najboljeg sportaša Primorsko-goranske županije u ak. god. 2023./2024. osvojio je **Enrico Marotti**.

Erika Raimund bavi se streličarstvom te je dobitnica više nagrada. Na raznim natjecanjima u zemlji i inozemstvu (Državna prvenstva Hrvatske, Međunarodna prvenstva u Italiji) osvojila je više zlatnih, srebrnih i brončanih odličja.

Nagrade i priznanja djelatnicima

Sukladno Odluci dekana o utvrđivanju kriterija za godišnje nagrađivanje, na Svečanoj sjednici Fakultetskog vijeća dekan fakulteta izv. prof. dr. sc. Mladen Bulić dodijelio je **nagrade i priznanja nastavnicima i suradnicima za nastavnu izvrsnost** u ak. godini 2023./2024.:

Nagrade su dobili nastavnici:

izv. prof. dr. sc. Paulina Krolo
viša asistentica dr. sc. Martina Šopić

Pohvale su dobili nastavnici:

prof. dr. sc. Barbara Karleuša
doc. dr. sc. Josip Peranić
izv. prof. dr. sc. Silvija Mrakovčić
prof. dr. sc. Ivan Marović
doc. dr. sc. Elvis Žic
prof. dr. sc. Ivana Štimac Grandić
prof. dr. sc. Igor Ružić
izv. prof. dr. sc. Željko Smolčić
doc. dr. sc. Denis Ambruš
prof. dr. sc. Nevenka Ožanić
asistent Davor Marušić
asistentica Mirna Klobučar
asistentica Marta Marija Gržić

Sukladno Odluci dekana o utvrđivanju kriterija za godišnje nagrađivanje, Dekan Građevinskog fakulteta je za postignuća u 2024. godini dodijelio nagrade slijedećim znanstvenicima:

Nagrada za znanost – prof. dr. sc. Igor Ružić

Nagrada za mladog znanstvenika – viša asistentica dr. sc. Martina Šopić

Nagrada za najveći ukupan naplaćeni iznos od transfera znanja u 2024. godini i za najveći naplaćeni iznos za pojedini transfer znanja u 2024. godini – izv. prof. dr. sc. Natalija Bede Odorčić

Nagrada za inovacije i transfer tehnologije i znanja – doc. dr. sc. Petra Jagodnik

Dana 27. studenog 2024. rektorica Sveučilišta u Rijeci prof. dr. sc. Snježana Prijić Samaržija dodijelila je **UNIRI istraživačku titulu izv. prof. dr. sc. Ninu Krvavici**.

Izv. prof. dr. sc. Igor Ružić (kormilar) i **izv. prof. dr. sc. Ivan Marović** (flokist) osvojili su **3. mjesto na Državnom prvenstvu Hrvatske u klasi šljuka**, održanoj od 27. do 29. rujna 2024. u Sv. Filip i Jakovu.

Doc. dr. sc. Denisu Ambrušu dodijeljena je **zahvalnica Sveučilišta u Rijeci** za ostvarena postignuća u 2024. godini, a koja su pridonijela promicanju, napretku i ugledu Sveučilišta u Rijeci.

Katarina Tutić osvojila je nagradu **Best Young Researcher Presentation Award** na međunarodnoj konferenciji *7th International Conference on Multiscale Computational Methods for Solids and Fluids (ECCOMAS MSF 2025)*.

Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine dodijelila je 1. studenog 2024. u Sarajevu **doc. dr. Franju Šarčeviću prvu nagradu za najbolju prezentaciju istraživanja na trećim STEM susretima** održanima 25. i 26. listopada u Akademiji nauka i umjetnosti BiH.

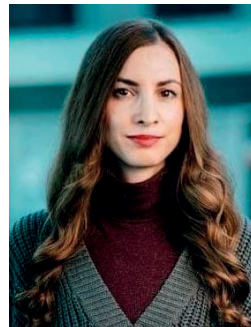
Novi znanstveno-nastavni djelatnici

doc. dr. sc. Ksenija Tijanić Štrok, mag. ing. aedif.

Katedra za organizaciju i tehnologiju građenja

Zavod za prometnice, organizaciju i tehnologiju građenja i arhitekturu

ksenija.tijanic@uniri.hr



Rođena je 3. kolovoza 1990. godine u Osijeku, Republika Hrvatska. Nakon završene osnovne i srednje škole, 2009. godine upisuje studij na Građevinskom fakultetu u Osijeku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, koji završava 2015. godine obranom diplomskog rada pod naslovom *Povezivanje trajanja i troškova u građevinskom projektu*, te stječe zvanje magistre inženjerke građevinarstva. Akademске godine 2015./2016. upisuje poslijediplomski sveučilišni studij na Građevinskom i arhitektonskom fakultetu u Osijeku, smjer Organizacija, tehnologija i menadžment građenja. Na istom fakultetu 28. listopada 2021. godine brani doktorsku disertaciju pod naslovom *Razvoj modela za učinkovito upravljanje održavanjem javnih obrazovnih građevina*, pod mentorstvom prof. dr. sc. Saše Marenjaka i prof. dr. sc. Diane Car-Pušić, čime stječe akademski stupanj doktora znanosti iz znanstvenog područja tehničkih znanosti, polja građevinarstvo.

Od studenoga 2015. do studenoga 2021. godine zaposlena je na suradničkom mjestu asistentice na Sveučilištu u Rijeci, Građevinski fakultet, na Zavodu za prometnice, organizaciju i tehnologiju građenja i arhitekturu, Katedra za organizaciju i tehnologiju građenja. Od siječnja 2022. godine na istoj Katedri zaposlena je na suradničkom mjestu više asistentice, a od veljače 2025. godine u zvanju docentice.

Na Građevinskom fakultetu u Rijeci sudjeluje u izvođenju nastave, najprije kao suradnica, a potom kao nositeljica kolegija na prijediplomskim i diplomskim studijima.

U svom znanstvenom radu primarno se bavi analizom ključnih parametara građevinskih projekata, poput vremenskih i troškovnih okvira te učinkovitosti, uz razvoj modela za optimizaciju izvedbenih procesa. Posebno područje znanstvenog interesa usmjereno je i na strategije održavanja javnih građevina te unapređenje održivosti i učinkovitosti tih procesa kroz inovativne pristupe i mehanizme.

Rezultate istraživanja objavila je u više znanstvenih radova u časopisima indeksiranim u bazama WoSCC i Scopus, kao i u većem broju međunarodnih i domaćih znanstvenih skupova. Aktivno je, kao suradnica i voditeljica, sudjelovala na nekoliko znanstveno-istraživačkih projekata Sveučilišta u Rijeci.

Članica je Hrvatske udruge za organizaciju građenja (HUOG).

doc. dr. sc. Franjo Šarčević

Zavod za matematiku i druge predmete

franjo.sarcevic@uniri.hr



Rođen je 22. siječnja 1991. u okolici Zahuma, Prozor-Rama, Bosna i Hercegovina. I osnovnu i srednju školu završio je kao učenik generacije. Federalno ministarstvo obrazovanja i znanosti dodijelilo mu je 2009. posebno priznanje za uspjehe na natjecanjima iz matematike i fizike.

Prvi ciklus studija matematike, smjer opći – teorijska matematika, upisao je na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu 2009. godine i završio ga 2012. godine. Godine 2014. završio je na istome fakultetu drugi ciklus studija, obranivši rad *Derivacije na p -adskom polju* pod mentorstvom Nacime Memić. Univerzitet u Sarajevu dodijelio mu je te godine nagradu za najboljeg studenta Prirodno-matematičkog fakulteta u svojoj generaciji.

Godine 2015. izabran je za asistenta na PMF-u u Sarajevu, gdje je 2018. unaprijeđen u zvanje višeg asistenta. Na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu radio je u ak. god. 2014./2015. i 2017./18. kao vanjski suradnik na matematičkim predmetima. Bio je redovno angažiran (2018. – 2023.) i u Školi matematike za nadarene učenike koju organizira Udruženje matematičara Kantona Sarajevo, kao i u organizaciji domaćih (BiH) i međunarodnih matematičkih natjecanja.

Treći ciklus studija upisao je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu 2015. u sklopu programa *Doktorski studij matematičkih nauka u Jugoistočnoj Evropi*, tijekom kojeg se odlučio baviti algebarskom topologijom, posebno teorijom homologije, homotopije i kalkulusom funktora na mnogostrukostima. Tijekom studija, dva semestra (2016. i 2019. godine) proveo je kao gostujuć istraživač na

fakultetu Wellesley College Massachusetts, SAD. Doktorsku disertaciju na temu *Calculus of Functors for r -Immersion*s obranio je u ožujku 2020. pod mentorstvom Ismara Volića, profesora na fakultetu Wellesley College.

Na Sveučilištu u Sevilli, Španjolska, radio je kao post-doktorand 2022. godine u sklopu projekta *Homotopía y grupos*. U sklopu Erasmus+ projekata, po tjedan dana predavao je na Politehničkom institutu u Tomaru, Portugal (2022.) i Sveučilištu u Grazu, Austrija (2024).

Godine 2023. dobio je treću, a 2024. prvu nagradu Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine za najbolju prezentaciju istraživanja.

Osnivač je i glavni urednik portala Prometej.ba (2011. – danas). Od 2020. suradnik je američkog Instituta za matematiku i demokraciju. Autor je dviju knjiga i većeg broja radova u matematičkim i društvenim časopisima i knjigama.

Od 1. siječnja 2023. zaposlen je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu u zvanju docenta, a od 1. ožujka 2025. na Građevinskom fakultetu u Rijeci u zvanju docenta.

izv. prof. dr. sc. Emina Hadžalić

Katedra za tehničku mehaniku

Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku

emina.hadzalic@uniri.hr



Rođena je 27. svibnja 1991. godine u Sarajevu, Bosna i Hercegovina. Osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje završila je kao učenica generacije. Prvi ciklus studija građevinarstva završila je 2012. godine, a drugi ciklus studija građevinarstva, smjer konstrukcije, 2014. godine na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Sarajevu. Za postignuti izuzetan akademski uspjeh nagrađena je Zlatnom značkom Univerziteta u Sarajevu i nakon prvog i nakon drugog ciklusa studija.

Od 2014. godine zaposlena je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Sarajevu, najprije kao asistent, a od 2019. godine kao viši asistent za područje Konstrukcije. Dobitnica je stipendije Vlade Francuske za realizaciju zajedničkog doktorskog studija koji je pohađala na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Sarajevu (Bosna i Hercegovina) i na sveučilištu Université de Technologie de Compiègne (Francuska). Doktorski studij upisala je 2015. godine, a doktorsku disertaciju pod nazivom *Analiza uticaja pornog pritiska na mehanizme loma konstruktivnih sistema* obranila je 2019. godine pod mentorstvom prof. dr. sc. Samira Dolarevića i prof. dr. sc. Adnana Ibrahimbegovića (professeur classe exceptionnelle).

Od veljače 2020. godine zaposlena je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Sarajevu u zvanju docenta za područje Konstrukcije te Geotehnika i geološko inženjerstvo, a od travnja 2025. godine na Građevinskom fakultetu u Rijeci u zvanju izvanredne profesorice na Katedri za tehničku mehaniku.

U razdoblju od 2015. do 2020. godine bila je angažirana kao stručni suradnik na projektima Instituta za materijale i konstrukcije Građevinskog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, a od 2020. do 2025. godine kao stručni suradnik na projektima Instituta za geotehniku istog fakulteta. Ovlaštena je za samostalno obavljanje poslova odgovornog projektanta za područja Konstrukcija i Geotehnika, sve u skladu s propisima Federacije Bosne i Hercegovine.

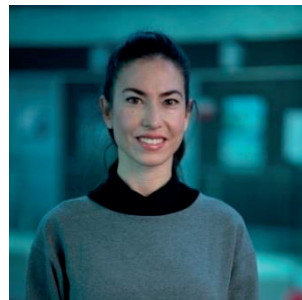
Članica je društva Central European Association for Computational Mechanics (CEACM), Hrvatskog društva za mehaniku (HDM) te društva Association of Computational Mechanics in Bosnia and Herzegovina (ACMBH).

doc. dr. sc. Martina Šopić, mag. ing. aedif.

Katedra za organizaciju i tehnologiju
građenja

Zavod za prometnice, organizaciju i
tehnologiju građenja i arhitekturu

martina.sopic@uniri.hr



Martina Šopić rođena je 23. travnja 1987. godine u Rijeci, gdje je završila osnovnu i srednju školu. Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci upisala je 2006. godine, na kojem je 2009. završila prijediplomski sveučilišni studij i stekla akademski naziv sveučilišna prvostupnica inženjerka građevinarstva (univ. bacc. ing. aedif.), a 2011. diplomski sveučilišni studij, smjer Geotehnika, i stekla akademski naziv magistra inženjerka građevinarstva (mag. ing. aedif.).

Od 2012. do 2014. g. radila je u tvrtki RK-projekt d.o.o. kao suradnica u projektnom uredu. Stručni ispit u strukovnom području građevinarstva za obavljanje poslova sudionika u gradnji položila je 17. prosinca 2014. Od 2015. do 2016. g. radila je u Ugostiteljskoj školi Opatija kao nastavnica gospodarske matematike.

U lipnju 2016. zaposlila se kao asistentica na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci na Katedri za organizaciju i tehnologiju građenja. U prosincu 2016. upisala je poslijediplomski doktorski studij na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, smjer Organizacija građenja. Kao asistentica, držala je vježbe na kolegijima prijediplomskog sveučilišnog i stručnog studija, izvršavala obveze na doktorskom studiju, objavljivala znanstvene radove, sudjelovala u sveučilišnim znanstvenim projektima, usavršavala se putem edukacija i stručnih seminara te prisustvovala međunarodnim znanstvenim konferencijama i domaćim skupovima.

Dana 1. rujna 2022. na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu uspješno je obranila svoj doktorski rad (disertaciju) pod

naslovom *Sustav ranoga upozorenja približavanja graničnoj ekonomičnosti građevinskih strojeva pri zemljanim radovima*. Prvi mentor pri izradi disertacije bio je prof. dr. sc. Mladen Vukomanović, dok je druga mentorica bila prof. dr. sc. Diana Car-Pušić. Obranom disertacije ispunila je sve uvjete za stjecanje doktorata znanosti i promovirana je u doktoricu znanosti iz znanstvenog područja tehničkih znanosti, znanstvenog polja građevinarstvo (dr. sc.).

Od 1. studenog 2022. do 30. rujna 2025. radila je kao viša asistentica na Katedri za organizaciju i tehnologiju građenja na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Kao viša asistentica držala je vježbe na kolegijima prijediplomskog sveučilišnog i stručnog studija, objavljivala znanstvene radove, vodila sveučilišni znanstveni projekt i sudjelovala u sveučilišnim znanstvenim projektima, pohađala edukacije i stručne seminare te prisustvovala međunarodnim znanstvenim konferencijama. U lipnju 2025. dobitnica je dviju nagrada Građevinskog fakulteta u Rijeci, jedne za nastavnu izvrsnost u kategoriji nastavnika na nastavnim i suradničkim radnim mjestima u 2024. godini, a druge za mladog znanstvenika u 2024. godini.

Od 1. listopada 2025. na Katedri za organizaciju i tehnologiju građenja na Građevinskom fakultetu Sveučilištu u Rijeci radi kao docentica.

IN MEMORIAM

Prof. dr.sc. Edvard Pavlovec

(1945. – 2024.)



U 87. godini života preminuo je prof.dr.sc. Edvard Pavlovec, profesor mehanike tla i temeljenja i bivši dekan i prodekan Građevinskog fakulteta u Rijeci. Prof. dr. sc. Edvard Pavlovec rođen je 17. kolovoza 1938. u mjestu Kilovče kraj Ilirske Bistrice, Slovenija. Od 1948. godine živi u Rijeci, gdje je 1956. godine završio Srednju tehničku građevinsku školu. Nakon završene srednje škole zaposlio se u Građevno-projektnom zavodu u Rijeci, a 1961. godine upisao Građevinski fakultet u Zagrebu. Diplomirao je 1966. na konstruktorskom smjeru i stekao zvanje diplomiranog inženjera građevinarstva. Tri godine radio je u Snam-INA projektu, mješovitom talijansko-jugoslavenskom poduzeću sa sjedištem u Milanu u Italiji, gdje je vodio građevinski odjel i bavio se projektiranjem temeljenja za građevine rafinerije u Milanu. Projektirao je i vodio izgradnju plinovoda Shames – Abu Dhabi kao jedan od najznačajnijih projekata te tvrtke. Godine 1971. vraća se u Rijeku i zapošljava u tvrtki Rijeka-projekt, gdje do 1977. godine radi kao samostalni projektant konstruktor. Godine 1974. boravio je na specijalizaciji kod profesora Michelea Jamiolkowskog u Milanu u tvrtki Studio geotechnico Italiano kao stipendist vlade Italije. Profesor Jamiolkowski, jedan od velikana geotehnike kao autor sanacije kosog tornja u Pisi i predsjednik Međunarodnog društva za mehaniku tla i temeljenje (kasnije ISSMGE), imao je značajan utjecaj na njegov odabir geotehnike kao primarnog interesa u području građevinarstva.

Njegove najznačajnije konstrukcije koje je projektirao su konstrukcija nebodera Vulkan na Pećinama, konstrukcija poliklinike

na Sušaku, temeljenje i konstrukcije robna kuća Ri u Rijeci, MTT centar (pošta) na Kozali, pješački pothodnik u Ulici Ivana Zajca u Rijeci s prvom primjenom armirano-betonskih dijafragmi u Hrvatskoj (i tadašnjoj Jugoslaviji) i istočne tribine na nogometnom stadionu Kantrida. Također je izradio brojne projekte temeljenja i sanacija temelja za brojne građevine u Rijeci i okolici.

Poslijediplomski magistarski studij na smjeru Geotehnika završio je na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 1976. godine te stekao magisterij znanosti iz područja građevinarstva, grana geotehnika. Po završenom magisteriju dva puta je boravio na znanstvenom usavršavanju na instituciji Politechnica Gdanska, u Gdanjsku u Poljskoj kod čuvenog profesora Eugeniusa Dembickog (1977. i 1979. godine).

Svoju nastavničku karijeru započeo je 1974. godine na Tehničkom fakultetu u Rijeci (u okviru kojeg je djelovala i Viša građevinska škola) kao asistent na kolegiju Mehanika tla i temeljenje, nositelj kojeg je bio profesor Ervin Nonveiller, otac hrvatske geotehnike. Na Građevinskom fakultetu u Rijeci (tada Fakultet graditeljskih znanosti) zaposlio se je 1978. godine na mjestu predavača na kolegiju Mehanika tla i temeljenje na tadašnjem dodiplomskom studiju. Doktorirao je 1986. na Fakultetu građevinskih znanosti Sveučilišta u Zagrebu doktorskim radom pod naslovom *Horizontalno opterećeni šipovi* pod mentorstvom prof.dr.sc. Ervina Nonveillera. Građevinski fakultet u Rijeci je do 1991. godine kao Fakultet graditeljskih znanosti djelovao kao najznačajnija znanstvena i stručna građevinska tvrtka u Hrvatskoj u sklopu Građevinskog instituta sastavljenog od četiri građevinska fakulteta u Zagrebu, Rijeci, Splitu i Osijeku. Na Fakultetu graditeljskih znanosti u Rijeci obnašao je dužnost prodekana od 1985. – 1989. godine, dekana od 1989. – 1991. te tehničkog direktora zaduženog za stručni rad 1989. godine. Posebno važnu ulogu imao je tijekom svog prvog dekanskog mandata u kojem je uslijed nove zakonske regulative došlo do razdruživanja Građevinskog instituta na četiri građevinska fakulteta (u Zagrebu, Splitu, Rijeci i Osijeku) te na Institut građevinarstva Hrvatske sa sjedištem u Zagrebu i poslovnim centrima u Splitu,

Rijeci i Osijeku. Razdruživanje je uspješno proveo, a Fakultet je nastavio svoju djelatnost pod današnjim nazivom Građevinski fakultet u Rijeci u okviru samostalne hrvatske države. Novi mandat dekana odradio je u periodu od 1995. – 1997. godine. Nakon toga je sve do umirovljenja obnašao dužnost pročelnika Katedre za hidrotehniku i geotehniku.

Može se reći da je profesor Edvard Pavlovec utemeljio geotehniku kao granu znanosti u Rijeci. Od 1986. godine zapošljavao je mlađe suradnike u zvanju asistenta, što je s godinama dovelo do stvaranja sadašnje respektabilne i u svijetu prepoznate Katedre za geotehniku na Građevinskom fakultetu u Rijeci. Predavao je brojne kolegije u grani geotehnika i objavio značajan broj znanstvenih i stručnih radova iz područja konstrukcija i geotehnike u časopisima i na konferencijama u zemlji i inozemstvu. Bio je jedan od omiljenih profesora na Fakultetu zbog svojih zanimljivih predavanja u kojima je znanja iz mehanike tla i temeljenja uvijek povezivao s primjerima iz prakse objašnjavajući praktične veze teorijskih osnova ponašanja tla i geotehničkih konstrukcija. Stoga su, iako je polaganje dvosemestralnog kolegija Mehanika tla i temeljenje bilo jedno od najtežih na studiju i iako u to vrijeme pohađanje predavanja nije bilo obavezno, njegova predavanja uvijek bila dobro posjećena. Umirovljen je 2002. godine, ali je još godinama nakon toga ostao aktivan u inženjerskoj geotehničkoj praksi.

Profesora Edvarda Pavlovca pamtit ćemo kao uglednog i uzornog inženjera, znanstvenika i profesora, ali prije svega kao pouzdanog čovjeka i kolegu te ugodnog sugovornika u stručnoj, znanstvenoj i svakoj drugoj raspravi i razgovoru, spremnog pomoći kako svojim bogatim znanjem i iskustvom, tako i na svaki drugi način.

pripremio: Željko Arbanas, Professor Emeritus

Predstavljanje tvrtki iz Stručne baze Sveučilišta u Rijeci – Građevinski fakultet

Rijekaprojekt Vodogradnja d.o.o.



Rijekaprojekt-vodogradnja d.o.o. je tvrtka specijalizirana za projektiranje, nadzor i savjetovanje u području hidrotehničkih građevina i vodnocomunalne infrastrukture. Posluje na adresi Moše Albaharija 10a u gradu Rijeci. Tvrtka ima dugogodišnje iskustvo u projektiranju, a prve aktivnosti sežu od 1947. godine kada je osnovan Centralni biro za projektiranje. Odvajanjem jednog dijela Centra za projektiranje, 1953. osnovana je projektna tvrtka Rijekaprojekt. Tadašnji Rijekaprojekt sastojao se od više odjela koje su činili vodogradnja, niskogradnja, arhitektura, konstrukterstvo, strojarstvo, elektrotehnika i geološko geotehnički istražni radovi. Privatizacijom tvrtke 1996. godine, odjel Vodogradnja postaje samostalna tvrtka Rijekaprojekt-vodogradnja d.o.o.. Tvrtka danas zapošljava 10 djelatnika s tendencijom daljnjeg širenja. Na čelu tvrtke je direktorica dr. sc. Nevena Dragičević, dipl. ing. građ., bivša djelatnica Fakulteta.

HIDROTECH d.o.o.

HIDROTECH d.o.o. je tvrtka koja se bavi uslugama izrade studijske, projektne i natječajne dokumentacije te nadzorom i vođenjem projekata vodnokomunalne infrastrukture. Sjedište tvrtke je na adresi Franje Čandeka 23/B u gradu Rijeci. Primarna djelatnost tvrtke je projektiranje vodoopskrbnih sustava i sustava odvodnje. Na vodoopskrbnim sustavima, osim cjevovoda projektiraju se i objekti poput zasunskih okana, crpnih stanica, vodosprema, crpilišta i uređaja za obradu vode. Na sustavima odvodnje, projekti obuhvaćaju gravitacijske kanale i tlačne cjevovode, crpne stanice te uređaje za pročišćavanje otpadnih voda s ispuštima u vodotoke ili more. Posao je pretežno uredski, uz povremene terenske izlaske.

U sklopu projektiranja, tvrtka se susreće s raznim izazovima koje savladavaju profesionalnim pristupom na zadovoljstvo klijenta. Svaki veći posao projektiranja kreće od sagledavanja „šire slike“, odnosno definiranja koncepcije rješenja, potom postavljanja trase i pozicioniranja objekata na geodetskim podlogama te, na kraju, razrade do razine glavnog ili izvedbenog projekta uz izradu troškovnika radova.

Prilikom definiranja koncepcije sustava odvodnje ili vodoopskrbe izrađuju se hidraulički matematički modeli postojećeg i planiranog stanja tečenja s obzirom da je hidraulika temelj svakog važnijeg vodoopskrbnog objekta. U firmi su zaposleni inženjeri građevine s dugogodišnjim iskustvom, kao i mladi kolege, a kompletnu uslugu tvrtka osigurava suradnjom s inženjerima geodezije, strojarstva i elektrotehnike, a u određenim slučajevima i s arhitektima i slično. Klijenti tvrtke su pretežno javna poduzeća, odnosno vodovodi na području cijele Republike Hrvatske. Od značajnijih poslova može se izdvojiti nekoliko sljedećih: Koncepcijska rješenja i hidraulički matematički modeli vodoopskrbnih sustava Cres-Lošinj, Varaždin, Bjelovar, Ivanec, Petrinja, Vukovar i dr., Hidraulički matematički

modeli sustava odvodnje Rijeka, Sesvete i dr., Idejni i glavni projekti sustava odvodnje i pročišćavanja Labin, Jadranovo, Bakar, Makarska, Komin-Banja i dr., Idejni i glavni projekti vodoopskrbnih cjevovoda i objekata na području Zadra, Bjelovara, Zagreba, Pule, Rijeke, Brača i dr., poput vodospreme VS Oporovec u Zagrebu kao jedne od najvećih u RH, Izvedbeni projekti aglomeracije Rijeka, Zagreb, Zabok i dr.

LMNT Studio d.o.o.

Tvrtka LMNT Studio d.o.o. je projektantska tvrtka iz Rijeke, osnovana 2024. godine. Nalazi se na riječkom Korzu, na adresi Ante Starčevića 4, dva kata iznad arhitektonske tvrtke ZDL Arhitekti d.o.o., s kojom najviše surađuje. Bavi se projektiranjem stambenih građevina, odnosno izradom projekata konstrukcije i vodovoda i odvodnje te provedbom stručnog nadzora na izgradnji stambenih građevina. U svojem radu koristi najnovije programske alate i provodi redovite edukacije zaposlenika.

Tvrtka se bavi poslovima projektiranja i stručnog nadzora na cijelom području Republike Hrvatske. Tvrtka trenutno zapošljava tri osobe u punom radnom vremenu i nekoliko vanjskih suradnika. Od najznačajnijih referenci i projekata realiziranih u posljednjih pet godina valja izdvojiti izradu glavnog projekta konstrukcije višestambene građevine s podzemnom garažom u Volosku (Opatija) te izradu izvedbenog projekta ventilirane fasade na rekonstrukciji bolničke zgrade KBC-a Rebro u Zagrebu. Od samog osnivanja tvrtka sudjeluje u aktivnostima s Građevinskim fakultetom u Rijeci, aktivna je članica Hrvatskog centra za potresno inženjerstvo te redovito sudjeluje na stručnim i znanstvenim skupovima u Hrvatskoj i inozemstvu kao što su Dani HKIG, Sabor hrvatskih graditelja, CroCEE i Bauma.

StiroDom Hrvatska d.o.o.



StiroDom Hrvatska je brand nastao 2011. godine, a razvoj vlastitih proizvoda pokreće od 2017. godine kada se specijalizira za proizvodnju inovativnih proizvoda te veleprodaju materijala i uređaja niskoenergetske i pasivne gradnje, odnosno asortimana koji se koristi u inteligentnoj i najzahtjevnijoj protupotresnoj energetski učinkovitoj gradnji.

Na tržište stalno uvodimo održiva rješenja koja znatno pridonose poboljšanju kvalitete života i očuvanju resursa. Proizvodi od StiroDom tehnologije i materijala predstavljaju ekonomično ulaganje u budućnost i samim time povećavaju vrijednost nekretnine. Visoka kvaliteta svih proizvoda potvrđena je ispitivanjima, tu su i Izjave o svojstvima, a sve to popraćeno je stalnim razvojem, modernizacijom proizvodnih pogona i proširenjem proizvodnih kapaciteta. Svi proizvodi proizvedeni su najsuvremenijom tehnologijom, a njihova kvaliteta zadovoljava hrvatske i EU standarde.

Snaga naših inovacija temelji se na marljivom razvoju, uključujući uzimanje u obzir iskustva različitih profesija. Osim toga, u naše inovacijske procese uključujemo vanjske stručne suradnike (dizajnere, izvođače, institute, građevinske fakultete itd.) i održavamo brojne kontakte dobre suradnje sa znanstvenicima i poslovnim ljudima. Time stvaramo i plasiramo održivu budućnost u građevinskom sektoru te kombiniramo gospodarski uspjeh, zaštitu okoliša i društvenu odgovornost. Znanošću i inovacijama svojim kupcima u građevinskom sektoru omogućujemo da zadovolje trenutne i buduće potrebe društva jer je inovacija ključ izdvajanja iz mase u teškom tržišnom okruženju.

Sistem energetski učinkovite gradnje je inovativno i inteligentno konstrukcijsko rješenje koje kombinira izvedbu (ICF Insulating concrete form) armiranog betona s visokom toplinskom izolacijom od ekološki prihvatljivih sirovina EPS Stiropora ili Neopora, kamene vune ili u jednoj od navedenih kombinacija, koji ne sadrže CFC, HCFC, HFC ni ostale halogenizirane plinove. Pri proizvodnji pjene koristi se zrak, odnosno mineralnih vlakana za kamenu vunu, što dodatno osigurava da će materijal zadržati izolacijski učinak tijekom

cijelog vijeka trajanja zgrade projektirane prema najzahtjevnijim protupotresnim smjernicama Eurocodu 8, kao i nZeb (eng. nearly zero-energy building) smjernicama potrošnje gotovo nulte energije. Tvrtka je razvila i patentirala nekoliko inovacija, poput ModulBlocka, zidne izolacijske oplata koja služi kao kalup za armiranje građevinske armature i ulijevanje betona, zatim obostranog 100 % protupožarnog sustava ModulBlock firestop-one (inovativno i inteligentno konstrukcijsko rješenje koje kombinira izvedbu armiranog betona s paropropusnom visokom toplinskom izolacijom), ModulBlocka firestop-two kao jednostranog 100 % protupožarnog sustava koji kombinira izvedbu armiranog betona s paropropusnom visokom toplinskom izolacijom, ModulMonta koji zamjenjuje građevinsku oplatu za izradu armirano betonskih međukatno – stropnih i krovnih konstrukcija s izuzetno visokim performansama zvučne i toplinske vrijednosti te Modulispunu s preklapom za predgotovljeni sistem, odnosno za fert gredice koje se koriste u građevinarstvu i služe za stropne i međukatne klasične i tradicionalne fert gredice.

Tvrtka StiroDom Engineering d.o.o. istaknula se brojnim domaćim i međunarodnim priznanjima za inovacije u građevinarstvu. Među najznačajnijim nagradama su tri zlatne medalje osvojene na prestižnim međunarodnim sajmovima inovacija u Hrvatskoj, Poljskoj i Tajlandu tijekom 2023. godine. Tvrtka je također prepoznata kroz priznanja poput nagrade *Nikola Tesla – Genij za budućnost* te od strane Hrvatske gospodarske komore i drugih stručnih organizacija. Njihova inovacija StiroDom potvrđena je kao komercijalno vrijedna, a intelektualna prava su zaštićena pri relevantnim institucijama. Zahvalnicu za doprinos inovacijama u građevinarstvu dodijelio im je i Građevinski fakultet u Rijeci 2024. godine. Sjedište uprave tvrtke StiroDom Engineering d.o.o. nalazi se u Žrnovnici nedaleko grada Splita na adresi Hrvatskih velikana 16, dok se proizvodni pogon nalazi u Lučkom u Zagrebu. Više informacija o tvrtki dostupno je na stranici www.stirodom.com.



d.o.o., Lič
građevinarstvo: stručni nadzor, vođenje projekata,
projektiranje, procjena vrijednosti nekretnina
E-mail: kling@kling.hr

KLing d.o.o.

Tvrtka KLing d.o.o. osnovana je 1994. godine te svojim dugogodišnjim iskustvom i kvalitetom poslovanja ostvaruje uspješne poslovne rezultate u području građevinarstva kroz djelatnosti stručnog nadzora, projektiranja, upravljanja projektima i procjenama vrijednosti nekretnina.

Od osnivanja tvrtka započinje stalan i stabilan rast u suradnji s renomiranim partnerima – konzultantskim tvrtkama, kao i u unapređenju kvalitete usluga, broju zaposlenih i profesionalnom obrazovanju djelatnika. Danas tvrtka broji 27 zaposlenika, 21 inženjera od čega 15 ovlaštenih inženjera građevinarstva i 1 ovlaštenog inženjera strojarstva sa širokim iskustvom u različitim područjima graditeljstva, 3 magistra ekonomije i 1 magistra prava. Taj rast je popraćen i stalnim rastom ukupnog prihoda, ulaganjem u vlastite poslovne prostore i kontinuirano usavršavanje i edukaciju stručnog kadra, a prije svega ulaganjem u razvoj procesa provedbe konzultantskih usluga, primjenom adekvatne računalne opreme i apliciranjem suvremene programske podrške.

Spomenutim proširivanjem djelatnosti KLing d.o.o. se dodatno etablirao na domaćem tržištu i kao takav je u trajnoj ekspanziji. Privatnim i javnim korisnicima tvrtka nudi usluge vezane za projektiranje, stručni nadzor, upravljanje projektima i procjenjivanje svih vrsta nekretnina. Danas KLing d.o.o. svojim intelektualnim i profesionalnim kapacitetima klijentima pruža usluge na nivou koji osigurava potpuno zadovoljstvo klijenta načinom provedbe projekta i dosegnutim ciljem projekta.

Arhigon Technologies d.o.o.



Arhigon Technologies d.o.o. je mlada hrvatska tvrtka osnovana 17. siječnja 2024. godine sa sjedištem u Svetom Ivanu Zelini na adresi Ulica Mate Žigrovića 2. Tvrtka je registrirana kao društvo s ograničenom odgovornošću i klasificirana kao mikro poduzetnik u sektoru informacijskih tehnologija. Tvrtku vode i zastupaju Marko Bašić, direktor i jedan od osnivača tvrtke, te Jurica Lovaković prokurist i suvlasnik.

Tvrtka Arhigon Technologies d.o.o. bavi se uslužnim djelatnostima u vezi s informacijskom tehnologijom i računalima (NKD 62900). To uključuje širok spektar IT usluga, poput računalnog savjetovanja, podrške, razvoja softverskih rješenja i digitalnih alata, iako konkretni proizvodi ili usluge nisu javno specificirani.

Arhigon Technologies d.o.o. je hrvatska tehnološka tvrtka koja razvija digitalnu platformu Arhigon, namijenjenu modernizaciji i digitalizaciji procesa u građevinskoj industriji. Glavni fokus tvrtke je unapređenje načina na koji se izrađuju troškovnici i upravlja građevinskim projektima, s ciljem povećanja učinkovitosti, smanjenja pogrešaka i poboljšanja suradnje među svim sudionicima u procesu gradnje.

Platforma Arhigon predstavlja centralizirano rješenje koje omogućuje projektantima, izvođačima, proizvođačima i investitorima da na jednom mjestu izrađuju troškovnike, surađuju u stvarnom vremenu, prate tijek projekata i analiziraju korištenje proizvoda i usluga. Sustav je osmišljen tako da korisnicima olakša rad kroz intuitivno sučelje, pristup bazama podataka, mogućnost komentiranja i dodavanja dokumenata, kao i praćenje svih izmjena u dokumentima.

Posebna vrijednost platforme leži u njezinoj sposobnosti da poveže sve dionike građevinskog procesa, od projekatanta koji izrađuju troškovnike, preko izvođača koji izrađuju ponude i građevinske knjige, do proizvođača i zastupnika koji žele plasirati svoje proizvode, te investitora i institucija koje nadziru provedbu projekata. Tvrtka omogućuje transparentan uvid u sve faze projekta, uz mogućnost analize učinkovitosti i korištenja resursa.

Vizija tvrtke temelji se na digitalnoj transformaciji građevinskog sektora, uz naglasak na automatizaciju, transparentnost i smanjenje administrativnog opterećenja. Platforma omogućuje korisnicima da u potpunosti eliminiraju pogreške u izračunima, udvostruče učinkovitost i unaprijede organizaciju rada. Time tvrtka Arhigon Technologies d.o.o. postaje ne samo alat, već i strateški partner u digitalizaciji građevinske industrije. Više informacija o tvrtki dostupno je na službenoj stranici tvrtke: arhigon.com.

pripremio: doc. dr. sc. Elvis Žic

