

ODREĐIVANJE KRITIČNE SILE IZVIJANJA ZA ŠTAP SKOKOVITO PROMJENJIVOG POPREČNOG PRESJEKA ANALITIČKIM PRISTUPOM I METODOM KONAČNIH RAZLIKA

COMPUTATION OF EULER'S CRITICAL BUCKLING LOAD FOR A ROD WITH STEPWISE VARYING CROSS-SECTION USING ANALYTICAL APPROACH AND THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Teo Mudrić*, Andrea Mirjanić*

Sažetak

U radu se određuje Eulerova kritična sila izvijanja štapova skokovito promjenjivog poprečnog presjeka primjenom analitičke metode i metode konačnih razlika. Usporedbom rezultata utvrđeno je da numerička metoda daje nešto niže, konzervativne vrijednosti kritične sile. Rezultati rada predstavljaju doprinos u analizi izvijanja elemenata složene geometrije i mogu poslužiti za validaciju numeričkih modela.

Ključne riječi: kritična sila, izvijanje, skokovito promjenjiv poprečni presjek, analitička metoda, metoda konačnih razlika

Abstract

This paper presents the computation of Euler's critical buckling load for rods with stepwise varying cross-section using both an analytical method and the finite difference method. A comparison of results shows that the numerical method yields slightly lower, conservative values. The results contribute to the analysis of buckling in geometrically complex elements and can be used to validate numerical models.

Key words: critical load, buckling, stepwise varying cross-section, analytical method, finite difference method

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
E-mail: {teo.mudric2, amirjanic}@gradri.uniri.hr

1. Uvod

Problem izvijanja štapnih elemenata izuzetno je važan u inženjerskoj praksi, jer se kod tankih i vitkih elemenata kritična sila izvijanja često javi prije granice čvrstoće materijala. Izvijanje je oblik gubitka stabilnosti štapnog elementa koji nastupa kada djelovanje tlačne sile uzrokuje naglo savijanje štapa iz ravnog položaja. Tlačna sila koja izaziva izvijanje naziva se kritična sila izvijanja F_{kr} . Kada centrična tlačna sila dosegne vrijednost te kritične sile, štap prelazi iz stabilnog u labilno stanje, što može dovesti do naglog povećanja deformacija i narušavanja nosivosti. Kako bi se to izbjeglo, potrebno je odrediti kritičnu silu za promatrani element, umanjiti je za odgovarajući koeficijent sigurnosti, i utvrditi da je stvarna uzdužna sila manja od te vrijednosti [1]. Kritična sila se umanjuje koeficijentom sigurnosti zbog nesavršenosti izvedbe, nehomogenosti materijala i mogućih ekscentriciteta tlačne sile. Eulerova teorija izvijanja pruža temelj za analizu takvih problema, pri čemu se kritična sila izvijanja određuje na temelju geometrijskih i materijalnih svojstava štapa te uvjeta oslanjanja [1]-[3].

U ovom radu istražuje se ponašanje štapa sa skokovito promjenjivim poprečnim presjekom, tj. štapa kod kojeg dolazi do nagle promjene savojne krutosti na jednoj ili više točaka duž njegove duljine. Takva geometrijska konfiguracija javlja se u praksi, primjerice kod elemenata modularnih čeličnih konstrukcija te kod spojeva različitih presjeka u armiranobetonskim konstrukcijama, gdje se zbog različitih zahtjeva projektiraju segmenti različitih dimenzija. Proučavanje izvijanja kod ovakvih elemenata važno je radi točne procjene nosivosti i sigurnosti konstrukcije.

Analizirani štap je homogen i izrađen od istog materijala duž cijele duljine. Pretpostavljeno je da je poprečni presjek kružnog oblika, pa se za moment površine drugog reda koristi oznaka I , dok se za savojnu krutost koristi EI , gdje je E modul elastičnosti. Budući da je kod kružnog presjeka moment površine drugog reda jednak u svim smjerovima, u ovom radu se podrazumijeva da se izvijanje događa oko bilo koje osi, te je $I = I_{min}$. U slučaju da bi presjek bio npr. pravokutan, bilo bi nužno koristiti I_{min} , odnosno moment površine drugog reda oko najslabije osi. U svim primjerima promjena presjeka događa se skokovito, pri čemu je poprečni presjek unutar svakog segmenta konstantan. Promjene se javljaju na polovini ili trećinama duljine nosača. U analiziranim slučajevima pretpostavlja se da se izvijanje događa u ravnini s konstantnom osi savijanja. Rubni uvjeti odgovaraju slobodno oslonjenom štapu, tj. oba kraja štapa su globno učvršćena.

U radu su primijenjene dvije metode:

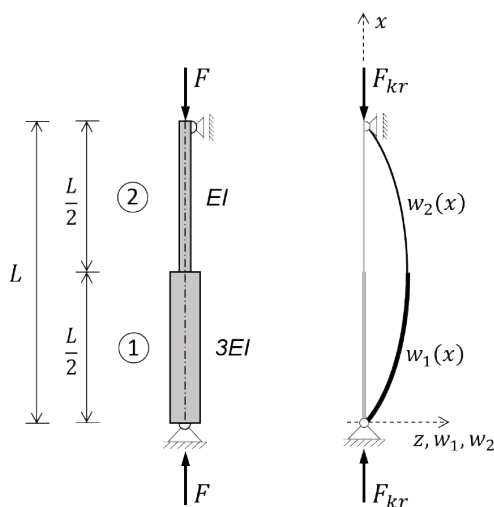
- *Analitička metoda (statički pristup)*, pri kojoj se rješava diferencijalna jednačba ravnoteže savijenog štapa uz zadane rubne uvjete i uvjete kontinuiteta, te se kritična sila određuje iz uvjeta postojanja netrivialnog rješenja sustava [1],[2].
- *Metoda konačnih razlika*, kao numerički pristup, gdje se kontinuirana jednačba aproksimira diskretnim izrazima [4], te se rješenje dobiva traženjem nule determinante matrice koeficijenata [1].

Obje metode primijenjene su na dva slučaja: štap s dva različita poprečna presjeka i štap s tri različita poprečna presjeka. Dobiveni rezultati uspoređeni su kako bi se ocijenila točnost i konzervativnost numeričkog rješenja u odnosu na analitičko.

2. Eulerova kritična sila izvijanja – statička metoda

2.1 Štap s dva različita poprečna presjeka

Za štap prikazan na Slici 1 odredit ćemo kritičnu silu izvijanja statičkom metodom. Ovaj pristup se sastoji od određivanja analitičkog rješenja jednačbe koja daje vezu između momenta savijanja i zakrivljenosti progibne linije, uz pretpostavku malih progiba [5]. Momentnu funkciju zapisujemo na deformiranom sustavu, a zakrivljenost, zbog pretpostavke malih progiba, aproksimiramo s drugom derivacijom funkcije probne linije [1].



Slika 1. Lijevo: skica nosača s dva različita poprečna presjeka. Desno: statička shema nosača s koordinatnim sustavom i deformirana os nosača s označenim funkcijama progiba za dijelove 1 i 2.

Štap na Slici 1 slobodno je oslonjen i ima dva različita poprečna presjeka. Na segmentu $[0, L/2]$ (označen s 1) poprečni presjek nosača ima savojnu krutost $3EI$ (E -modul elastičnosti, I -moment površine drugog reda), dok ona iznosi EI na segmentu $[L/2, L]$ (označen s 2). Na udaljenosti $L/2$ dolazi do skokovite promjene poprečnog presjeka.

Na segmentu 1 progibnu liniju označiti ćemo s $w_1 = w_1(x)$, a na segmentu 2 ona ima oznaku $w_2 = w_2(x)$. Za prvi i drugi dio nosača veza momenta savijanja i progibne linije dana je sljedećim diferencijalnim jednačbama:

$$w_1'' = -\frac{F \cdot w_1}{3EI} \quad (1)$$

$$w_2'' = -\frac{F \cdot w_2}{EI} \quad (2)$$

Uvođenjem supstitucije:

$$\alpha^2 = \frac{F}{3EI} \quad (3)$$

Jednačbe (1) i (2) postaju:

$$w_1'' + \alpha^2 w_1 = 0 \quad (4)$$

$$w_2'' + 3\alpha^2 w_2 = 0 \quad (5)$$

Dobivene su dvije homogene diferencijalne jednačbe drugog reda za koje su opća rješenja dana kao:

$$w_1(x) = A_1 \sin(\alpha x) + B_1 \cos(\alpha x) \quad (6)$$

$$w_2(x) = A_2 \sin(\sqrt{3}\alpha x) + B_2 \cos(\sqrt{3}\alpha x) \quad (7)$$

Ova rješenja moraju zadovoljavati dva rubna uvjeta i dva uvjeta kontinuiteta:

- rubni uvjeti

$$w_1(0) = 0 \quad (8)$$

$$w_2(L) = 0 \quad (9)$$

- uvjeti kontinuiteta

$$w_1(L/2) = w_2(L/2) \quad (10)$$

$$w_1'(L/2) = w_2'(L/2) \quad (11)$$

Derivacije funkcija w_1 i w_2 su:

$$w_1'(x) = \alpha A_1 \cos(\alpha x) - \alpha B_1 \sin(\alpha x) \quad (12)$$

$$w_2'(x) = \sqrt{3}\alpha A_2 \cos(\sqrt{3}\alpha x) - \sqrt{3}\alpha B_2 \sin(\sqrt{3}\alpha x) \quad (13)$$

Iz uvjeta (8) dobiva se:

$$B_1 = 0 \quad (14)$$

Iz (14) i preostalih uvjeta dobivamo tri jednadžbe koje se u matričnom obliku mogu zapisati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\sqrt{3}\alpha L) & \cos(\sqrt{3}\alpha L) \\ \sin\left(\alpha\frac{L}{2}\right) & -\sin\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) & -\cos\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) \\ \cos\left(\alpha\frac{L}{2}\right) & -\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) & +\sin\left(\sqrt{3}\alpha\frac{L}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ili skraćeno:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (16)$$

gdje $\mathbf{C} = [A_1 \ A_2 \ B_2]^T$, $\mathbf{0}$ je nul-vektor, a $\mathbf{A}$ je matrica koeficijenata u sustavu (15). Trivijalno rješenje, u kojem su $A_1 = A_2 = B_2 = 0$, odgovara ravnom obliku štapa (funkcije progiba su nula), međutim, nas zanima rješenje za koje je progib različit od nule. Stoga, da bi sustav imao rješenje različito od trivijalnog, determinanta koeficijenata mora biti jednaka nuli [6]:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (17)$$

Razvojem determinante dobiva se transcendentna jednadžba u kojoj nam je αL nepoznato, a iz rješenja jednadžbe (17) dobivamo iznos kritične sile izvijanja. U promatranom slučaju dobivamo trigonometrijsku jednadžbu koja ima više korijena, a najmanji korijen je dobiven primjenom Newtonove metode [7]. Tražen je najmanji korijen jer se iz njega dobiva najmanja vrijednost kritične sile izvijanja, što je u praktičnom smislu mjerodavna vrijednost. Najmanje rješenje koje zadovoljava determinantu (17) je:

$$\alpha L = 2,1596 \quad (18)$$

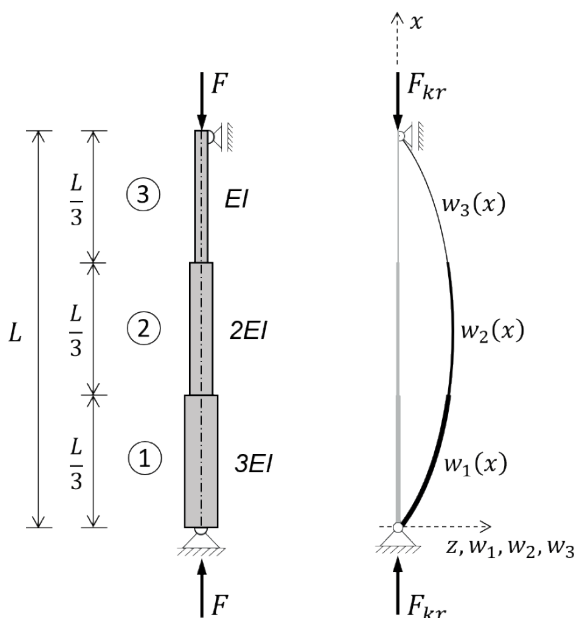
Primjenom supstitucije (3) dobiva se iznos kritične sile:

$$F_{kr} = \frac{13,9916EI}{L^2} \quad (19)$$

Za ovu vrijednost uzdužne sile, pored ravnog oblika štapa, mogući su i ravnotežni položaji u kojima štap poprima savijeni oblik (Slika 1).

2.2 Štap s tri različita poprečna presjeka

Sljedeći primjer odnosi se na slobodno oslonjen štap duljine L i s tri različita poprečna presjeka. Promjena presjeka događa se skokovito na trećinama duljine štapa, a među njima su presjeci konstantni. Analizirani primjer prikazan je na Slici 2 na kojoj su dane oznake segmenata, odnosi savojnih krutosti i oznake progibnih funkcija. Progib segmenta i označen je funkcijom $w_i(x) = w_i$ za $i = \{1, 2, 3\}$. Savojne krutosti segmenata 1, 2 i 3 su redom $3EI$, $2EI$ i EI .



Slika 2. Lijevo: skica nosača s tri različita poprečna presjeka. Desno: statička shema nosača s koordinatnim sustavom i deformirana os nosača s označenim funkcijama progiba za dijelove 1, 2 i 3.

Iz veze druge derivacije progiba i momentne funkcije za svaki segment, slijede tri diferencijalne jednačbe, od kojih svaka vrijedi na pojedinom segmentu:

$$w_1'' + \alpha^2 w_1 = 0 \quad (20)$$

$$w_2'' + 1,5\alpha^2 w_2 = 0 \quad (21)$$

$$w_3'' + 3\alpha^2 w_3 = 0 \quad (22)$$

U prethodnim jednačbama α je dano kao:

$$\alpha^2 = \frac{F}{3EI} \quad (23)$$

Opća rješenja jednadžbi (20), (21) i (22) su:

$$w_1(x) = A_1 \sin(\alpha x) + B_1 \cos(\alpha x) \quad (24)$$

$$w_2(x) = A_2 \sin(\sqrt{1,5}\alpha x) + B_2 \cos(\sqrt{1,5}\alpha x) \quad (25)$$

$$w_3(x) = A_3 \sin(\sqrt{3}\alpha x) + B_3 \cos(\sqrt{3}\alpha x) \quad (26)$$

Derivacije funkcija progiba su:

$$w'_1(x) = \alpha A_1 \cos(\alpha x) - \alpha B_1 \sin(\alpha x) \quad (27)$$

$$w'_2(x) = \sqrt{1,5}\alpha A_2 \cos(\sqrt{1,5}\alpha x) - \sqrt{1,5}\alpha B_2 \sin(\sqrt{1,5}\alpha x) \quad (28)$$

$$w'_3(x) = \sqrt{3}\alpha A_3 \cos(\sqrt{3}\alpha x) - \sqrt{3}\alpha B_3 \sin(\sqrt{3}\alpha x) \quad (29)$$

Iznos kritične sile dobivamo iz rubnih uvjeta i uvjeta kontinuiteta. Za promatrani primjer imamo dva rubna uvjeta i četiri uvjeta kontinuiteta:

- *rubni uvjeti*

$$w_1(0) = 0 \quad (30)$$

$$w_3(L) = 0 \quad (31)$$

- *uvjeti kontinuiteta*

$$w_1\left(\frac{L}{3}\right) = w_2\left(\frac{L}{3}\right) \quad (32)$$

$$w'_1\left(\frac{L}{3}\right) = w'_2\left(\frac{L}{3}\right) \quad (33)$$

$$w_2\left(\frac{2L}{3}\right) = w_3\left(\frac{2L}{3}\right) \quad (34)$$

$$w'_2\left(\frac{2L}{3}\right) = w'_3\left(\frac{2L}{3}\right) \quad (35)$$

Iz uvjeta (30) dobiva se:

$$B_1 = 0 \quad (36)$$

Uvođenjem sljedećih oznaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sin\left(\frac{\alpha L}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \\ \cos\left(\frac{\alpha L}{3}\right) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \\ 0 & \sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\alpha L\right) & \dots \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$(nastavak) \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}\alpha L) & \cos(\sqrt{3}\alpha L) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) & -\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) \\ -\sqrt{3}\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) & \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha L\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [A_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad A_3 \quad B_3]^T \quad (38)$$

i uz primjenu jednadžbe (36), uvjete (30), (32)-(35) možemo zapisati u skraćenom obliku kao:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (39)$$

Zanima nas netrivialno rješenje, a ono postoji ako je zadovoljen uvjet da je determinanta matrice $\mathbf{A}$ jednaka nuli:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (40)$$

Razvojem gornje determinante dobivamo složenu trigonometrijsku jednadžbu, za koju je najmanje rješenje dobiveno numerički Newtonovom metodom:

$$\alpha L = 4,105098 \quad (41)$$

odakle se, uz primjenu supstitucije (23), dobiva Eulerova kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{16,8518EI}{L^2} \quad (42)$$

Za ovu vrijednost uzdužne sile, pored ravnog oblika štapa, mogući su i ravnotežni položaji u kojima štap poprima savijeni oblik (Slika 2).

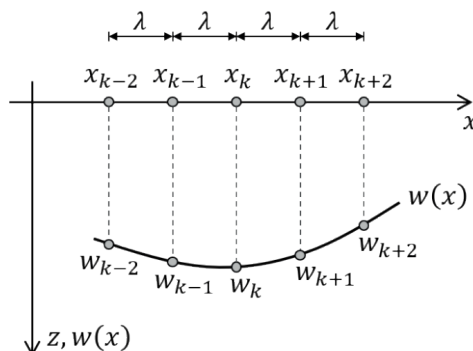
3. Eulerova kritična sila izvijanja – metoda konačnih razlika

Osnova ideja metode konačnih razlika (MKR) je ta da funkciju promatramo u diskretnim točkama (čvorovima), a njezine derivacije u tim točkama aproksimiramo centralnim razlikama. U našem slučaju, funkcija koju promatramo predstavlja progib nosača i ovisi samo o položaju uzduž osi nosača, pa je to funkcija jedne varijable. Stoga, do diskretnih točaka dolazimo tako da podijelimo nosač na konačan broj segmenata, a diskretne točke nalaze se između (na dodiru) segmenata.

Na Slici 3 prikazana je proizvoljna funkcija progiba nosača zajedno s čvornim točkama i podjelom domene na segmente (konačne duljine). Duljina segmenta označena je s λ , a vrijednost funkcije u nekom čvoru x_k označena je s $w_k = w(x_k)$. Prvu i drugu derivaciju funkcije u čvornoj točki x_k aproksimiramo na sljedeći način [4]:

$$w'_k \approx \frac{1}{2\lambda}(w_{k+1} - w_{k-1}) \quad (43)$$

$$w''_k \approx \frac{1}{\lambda^2}(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) \quad (44)$$

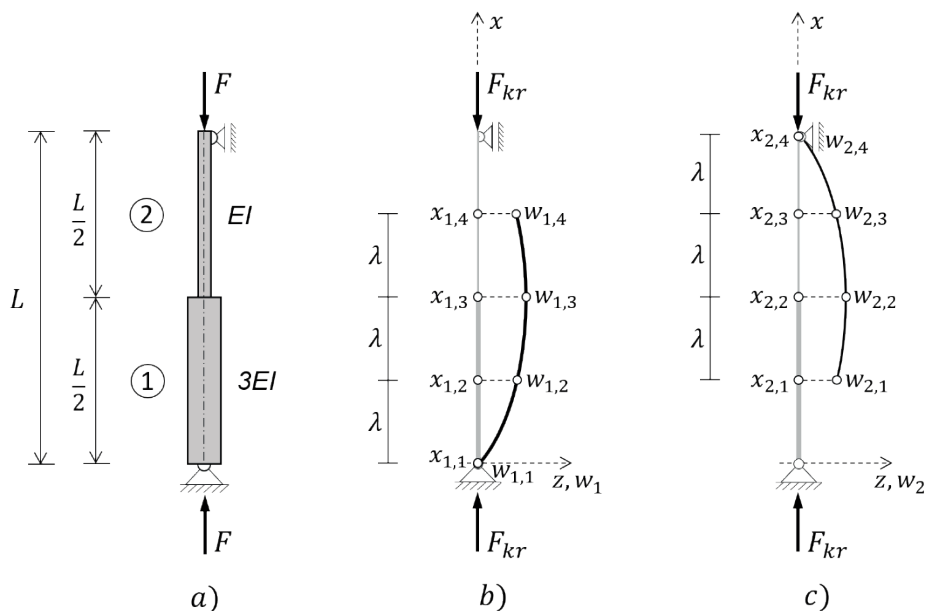


Slika 3. Proizvoljna funkcija progiba $w(x)$, čvorne točke x_k , te duljine segmenata λ .

3.1 Štap s dva različita poprečna presjeka

Promatramo štap za koji smo u odjeljku 2.1 odredili izraz za Eulerovu kritičnu silu statičkom metodom. Na Slici 4 prikazan je promatrani štap, podjela na konačne duljine, te čvorne točke. Duljina svake konačne duljine iznosi $\lambda = L/4$. Korištena je diskretizacija koja ima dvije konačne duljine za svaki dio nosača. Položaji čvornih točaka na nosaču imaju oznaku $x_{i,k}$, gdje je i broj segmenta nosača, a k je redni broj točke na pripadajućem

dijelu nosača. Metodu konačnih razlika primijenit ćemo na jednadžbe (4) i (5). Primijetimo na Slici 4 da su domene funkcija $w_1(x)$ i $w_2(x)$ zasebno diskretizirane te da svaka čvorna točka pripada samo jednoj od tih funkcija. Nadalje, možemo primijetiti da je nakon dijela 1 dodana jedna dodatna točka ($x_{1,4}$) koja pripada samo funkciji $w_1(x)$, a prije dijela 2 dodana je točka ($x_{2,1}$) koja se odnosi samo na funkciju $w_2(x)$. Ove su točke dodane da bi mogli za svaku od dviju funkcija zapisati zakrivljenost na sredini nosača te kako bi mogli reproducirati diskontinuitet u zakrivljenosti funkcije progiba, tj. u njezinoj drugoj derivaciji. Pomak funkcije progiba $w_i(x)$ (za $i = \{1, 2\}$) u točki $x_{i,k}$ označavat ćemo sa $w_i(x_{i,k}) = w_{i,k}$.



Slika 4. a) skica nosača s dva poprečna presjeka, b) podjela na diskretne točke za dio 1 i konačne duljine λ , c) podjela na diskretne točke za dio 2 i konačne duljine λ .

Sada, primjenom izraza (44) diferencijalnu jednadžbu (4), umjesto za cijelu domenu (dio 1), možemo zapisati u čvornim točkama. Zapis diferencijalne jednadžbe (4) u diferencijskom obliku u čvornim točkama $x_{1,2}$ i $x_{1,3}$ je:

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_{1,1} - 2w_{1,2} + w_{1,3}) + \alpha^2 w_{1,2} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_{1,2} - 2w_{1,3} + w_{1,4}) + \alpha^2 w_{1,3} = 0 \quad (46)$$

Na isti način, primjenom izraza (43), diferencijalnu jednadžbu (5) zapisujemo u diferencijalnom obliku u točkama $x_{2,2}$ i $x_{2,3}$ kao:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,1} - 2w_{2,2} + w_{2,3}) + 3\alpha^2 w_{2,2} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,2} - 2w_{2,3} + w_{2,4}) + 3\alpha^2 w_{2,3} = 0 \quad (48)$$

Preoblikovanjem jednadžbi (47)-(48) dobivamo:

$$w_{1,1} + (\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{1,2} + w_{1,3} = 0 \quad (49)$$

$$w_{1,2} + (\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{1,3} + w_{1,4} = 0 \quad (50)$$

$$w_{2,1} + (3\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{2,2} + w_{2,3} = 0 \quad (51)$$

$$w_{2,2} + (3\alpha^2 \lambda^2 - 2)w_{2,3} + w_{2,4} = 0 \quad (52)$$

Rubne uvjete i uvjete kontinuiteta (8)-(11) u diferencijalnom obliku možemo zapisati na sljedeći način:

$$w_{1,1} = 0 \quad (53)$$

$$w_{2,4} = 0 \quad (54)$$

$$w_{1,3} = w_{2,2} \quad (55)$$

$$\frac{1}{2\lambda}(w_{1,4} - w_{1,2}) = \frac{1}{2\lambda}(w_{2,3} - w_{2,1}) \quad (56)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta u jednadžbe (49)-(52) (pri čemu je iz (56) izražen $w_{2,4}$) slijedi u matičnom obliku:

$$\begin{bmatrix} (\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 2 & (\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 1 & -1 \\ 0 & (3\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (3\alpha^2 \lambda^2 - 2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

ili u kompaktnom zapisu:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (58)$$

gdje $\mathbf{D}$ matrica koeficijenata, a $\mathbf{W}$ vektor nepoznatih pomaka u čvornim točkama. Zanima nas netrivialno rješenje, iz čega slijedi da mora vrijediti:

$$\det(\mathbf{D}) = 0 \quad (59)$$

Razvojem ove determinante dobivamo polinomnu jednadžbu petog stupnja u kojem je nepoznanica umnožak $\alpha\lambda$. Najmanje pozitivno realno rješenje jednadžbe dobiveno je primjenom Newtonove metode:

$$\alpha^2 \lambda^2 = 0,27924 \quad (60)$$

odakle se, uz primjenu supstitucije (3) i supstitucije $\lambda = L/4$, dobiva Eulerova kritična sila:

$$F_{kr} = \frac{13,40352EI}{L^2} \quad (61)$$

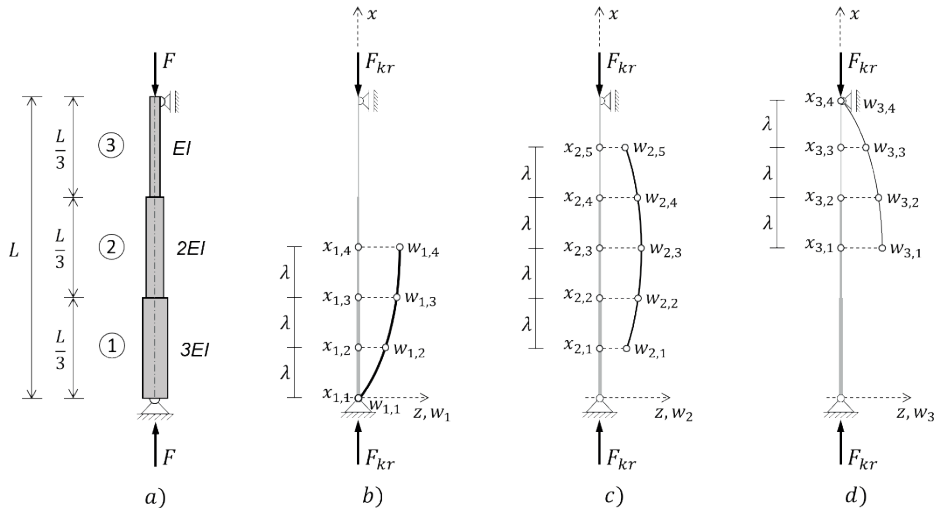
Greška u odnosu na analitičko rješenje koje slijedi iz statičke metode je:

$$\text{Greška} = \frac{13,4035 - 13,9916}{13,9916} \cdot 100\% = -4,2\% \quad (62)$$

Numeričko rješenje dobiveno metodom konačnih razlika za korak $\lambda = L/4$ je za 4,2 % manje od rješenja dobivenog statičkom metodom.

3.2 Štap s tri različita poprečna presjeka

Na Slici 5 prikazan je štap s tri različita poprečna presjeka te je dan odnos savojnih krutosti. Također, naznačena je podjela na konačne duljine i pripadajuće čvorne točke. Analiziran je isti primjer kao i u odjeljku 2.2, a u kojem je kritična sila dobivena statičkom metodom. Duljina svakog konačnog segmenta u odabranoj diskretizaciji iznosi $\lambda = L/6$. Kao i u prethodnom primjeru, korištena je diskretizacija koja daje dvije konačne duljine na svakom dijelu nosača.



Slika 5. a) skica nosača s tri poprečna presjeka, b) podjela na diskretne točke za dio 1 i konačne duljine λ , c) podjela na diskretne točke za dio 2 i konačne duljine λ , d) podjela na diskretne točke za dio 3 i konačne duljine λ .

Metodu konačnih razlika primijenit ćemo na jednadžbe (20), (21) i (22). Uz unutarnje rubove pojedinih dijelova nosača dodana je po jedna točka za pripadajuću funkciju progiba (Slika 5). Na taj način, na rubu svakog od tri segmenata moguće je izraziti različite zakrivljenosti za različite segmente nosača. Sada, primjenom izraza (44), diferencijalnu jednadžbu (20), umjesto za cijelu domenu (dio 1), možemo zapisati u čvornim točkama. Zapis diferencijalne jednadžbe (20) u diferencijskom obliku u čvornim točkama $x_{1,2}$ i $x_{1,3}$ je:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{1,1} - 2w_{1,2} + w_{1,3}) + \alpha^2 w_{1,2} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{1,2} - 2w_{1,3} + w_{1,4}) + \alpha^2 w_{1,3} = 0 \quad (64)$$

Istim postupkom jednadžba (21) u diferencijskom obliku za točke $x_{2,2}$, $x_{2,3}$ i $x_{2,4}$ glasi:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,1} - 2w_{2,2} + w_{2,3}) + 1,5\alpha^2 w_{2,2} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,2} - 2w_{2,3} + w_{2,4}) + 1,5\alpha^2 w_{2,3} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{2,3} - 2w_{2,4} + w_{2,5}) + 1,5\alpha^2 w_{2,4} = 0 \quad (67)$$

Za dio 3 diferencijski oblik jednadžbe (22) u pripadnim čvornim točkama jest:

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{3,1} - 2w_{3,2} + w_{3,3}) + 3\alpha^2 w_{3,2} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{3,2} - 2w_{3,3} + w_{3,4}) + 3\alpha^2 w_{3,3} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{1}{\lambda^2}(w_{3,3} - 2w_{3,4} + w_{3,5}) + 3\alpha^2 w_{3,4} = 0 \quad (70)$$

Rubni uvjeti i uvjeti kontinuiteti za diskretni sustav su:

- *rubni uvjeti*

$$w_{1,1} = 0 \quad (71)$$

$$w_{3,4} = 0 \quad (72)$$

- *jednakost pomaka na dodiru segmenata 1 i 2, te 2 i 3*

$$w_{1,3} = w_{2,2} \quad (73)$$

$$w_{2,4} = w_{3,2} \quad (74)$$

- jednakost zaokreta poprečnog presjeka na dodiru segmanata 1 i 2, te 2 i 3

$$\frac{1}{2\lambda}(w_{1,4} - w_{1,2}) = \frac{1}{2\lambda}(w_{2,3} - w_{2,1}) \quad (75)$$

$$\frac{1}{2\lambda}(w_{2,5} - w_{2,3}) = \frac{1}{2\lambda}(w_{3,3} - w_{3,1}) \quad (76)$$

Uvođenjem gornjih uvjeta (pri čemu je iz (75) izražen $w_{1,4}$, a iz (76) je izražen $w_{2,5}$) u jednađbe (63)-(70) te grupiranjem članova uz nepoznate pomake slijedi:

$$w_{1,3} + (\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{1,2} = 0 \quad (77)$$

$$2w_{1,2} + w_{2,3} - w_{2,1} + (\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{1,3} = 0 \quad (78)$$

$$w_{2,1} + w_{2,3} + (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{1,3} = 0 \quad (79)$$

$$w_{1,3} + w_{3,4} + (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{2,3} = 0 \quad (80)$$

$$2w_{2,3} + w_{3,3} - w_{3,1} + (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{2,4} = 0 \quad (81)$$

$$w_{3,1} + w_{3,3} + (3\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{2,4} = 0 \quad (82)$$

$$w_{2,4} + w_{3,4} + (3\alpha^2\lambda^2 - 2)w_{3,3} = 0 \quad (83)$$

Uvođenjem oznaka:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\alpha^2\lambda^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & (\alpha^2\lambda^2 - 2) & -1 & 1 & \dots \\ 0 & (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\begin{matrix} & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ (nastavak) & & 1 & 0 & 0 \\ & & (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) & -1 & 1 \\ & & (3\alpha^2\lambda^2 - 2) & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 & (3\alpha^2\lambda^2 - 2) \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ (1,5\alpha^2\lambda^2 - 2) \\ (3\alpha^2\lambda^2 - 2) \\ 1 \end{matrix}} \right] \quad (85)$$

$$\mathbf{W} = [w_{1,2} \ w_{1,3} \ w_{2,1} \ w_{2,3} \ w_{2,4} \ w_{3,1} \ w_{3,3}]^T \quad (85)$$

jednađbe (77)-(83) možemo skraćeno zapisati kao:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (86)$$

Netrivijalno rješenje postoji ako je zadovoljen uvjet:

$$\det(\mathbf{D}) = 0 \quad (87)$$

U determinanti (87) nepoznato nam je $\alpha\lambda$. Razvojem determinante te rješavanjem jednadžbe (87) Newtonovom metodom za $\alpha\lambda$ dobivamo:

$$\alpha^2\lambda^2 = 0,151 \quad (88)$$

Primjenom supstitucije (23) i supstitucije $\lambda = L/6$, dobivamo Eulerovu kritičnu silu:

$$F_{kr} = \frac{16,308EI}{L^2} \quad (89)$$

Greška u odnosu na analitičko rješenje koje slijedi iz statičke metode je:

$$Greška = \frac{16,308 - 16,8518}{16,8518} \cdot 100\% = -3,2\% \quad (90)$$

Numeričko rješenje dobiveno metodom konačnih razlika za korak $\lambda = L/6$ je za 3,2 % manje od rješenja dobivenog statičkom metodom.

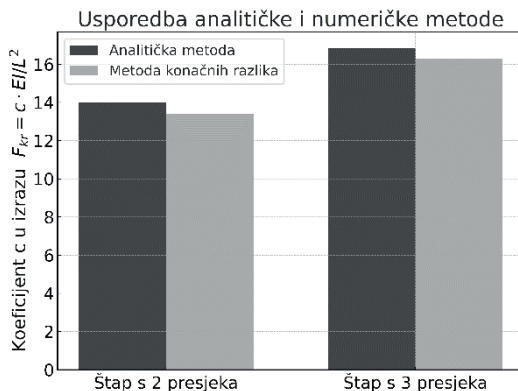
4. Usporedba rezultata i zaključak

U ovom radu analizirana su dva primjera slobodno oslonjenih nosača sa skokovito promjenjivim poprečnim presjekom, opterećenih uzdužnom silom, a cilj je bio odrediti Eulerovu kritičnu silu izvijanja. Kritična sila određena je analitičkom metodom i metodom konačnih razlika, pri čemu je u oba slučaja bilo potrebno formirati sustav algebarskih jednadžbi temeljenih na rubnim uvjetima i uvjetima kontinuiteta.

Dobiveni rezultati pokazuju da metoda konačnih razlika daje nešto niže vrijednosti kritične sile u odnosu na analitičko rješenje, čime se osigurava dodatna razina sigurnosti u praktičnoj primjeni. Za odabranu diskretizaciju s dvije konačne duljine po svakom segmentu nosača odstupanja su bila relativno mala: -4,2 % za nosač s dva presjeka i -3,2 % za nosač s tri presjeka. Takva odstupanja posljedica su aproksimacijske prirode metode jer se kontinuirane derivacije diferencijalnih jednadžbi zamjenjuju konačnim razlikama. Najznačajniji izvor pogreške je odabir duljine segmenta λ : manji koraci poboljšavaju točnost, ali povećavaju broj jednadžbi i složenost pripadne determinante. Dodatni izvori pogreške mogu nastati u formulaciji rubnih uvjeta i uvjeta kontinuiteta koji u praksi

često odstupaju od idealnih. Točnost je moguće poboljšati finijom diskretizacijom ili primjenom aproksimacija višeg reda.

Na Slici 6 prikazana je usporedba analitičkih i numeričkih rezultata.



Slika 6. Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti kritične sile izvijanja F_{kr} .

Važno je istaknuti da matrica sustava jednadžbi u metodi konačnih razlika ima veće dimenzije nego kod statičke metode, ali se njezino sastavljanje može automatizirati, što metodu čini pogodnom za računalnu implementaciju i analizu složenijih sustava.

Vrijednosti kritične sile izvijanja dobivene analitičkom (statičkom) metodom, zahvaljujući jasno definiranim pretpostavkama i točnosti unutar zadanog modela, mogu poslužiti kao referentne vrijednosti za usporedbu s rezultatima dobivenim drugim metodama – bilo numeričkim, eksperimentalnim ili softverskim. Time se dodatno potvrđuje njihova važnost u evaluaciji učinkovitosti i točnosti alternativnih pristupa.

Usporedba rezultata potvrđuje konzistentnost analitičkog i numeričkog pristupa u okviru postavljenih pretpostavki, a rad pruža osnovu za proširenje analize na složenije slučajeve, uključujući veći broj segmenata, nehomogene materijale ili složenije rubne uvjete.

Literatura

- [1] Šimić, V. (1995) Otpornost materijala II. 1. izdanje. Zagreb: Školska knjiga.
- [2] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961) Theory of Elastic Stability. New York (USA): McGraw-Hill.
- [3] Bazant, Z.P., Cedolin, L. (2003) Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. New York (USA): Dover Publications.
- [4] Chapra, S.C., Raymond, P.C. (2015) Numerical Methods for Engineers. 7th edition. New York (USA): McGraw-Hill.
- [5] Šimić, V. (2002) Otpornost materijala I. 2. izdanje. Zagreb: Školska knjiga.

- [6] Elezović, N. (2016) Linearna algebra. 2. izdanje. Zagreb: Element d.o.o.
- [7] Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics. 10th edition. Danvers (USA): John Wiley & Sons, Inc.