

EKSPERIMENTALNA I TEORIJSKA ANALIZA DEFORMIRANJA GREDE PRI VELIKIM POMACIMA I ROTACIJAMA

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL ANALYSIS OF BEAM DEFORMATION AT LARGE DISPLACEMENTS AND ROTATIONS

Leo Škec*, Dora Rupčić*, Nina Čeh*

Sažetak

Euler-Bernoullijeva gredna teorija, koja se tradicionalno koristi za rješavanje inženjerskih problema u građevinarstvu, pretpostavlja da su pomaci i rotacije greda u deformiranom stanju relativno mali. Takva pretpostavka, osim što je za većinu inženjerskih problema u građevinarstvu potpuno opravdana, dovodi do linearnog oblika kinematičkih jednadžbi problema, pa tako pojednostavljena matematička formulacija postaje vrlo praktična za uporabu. Međutim, u situacijama kada je krutost grede takva da dopušta linearno-elastično ponašanje pri relativno velikim deformacijama, Euler-Bernoullijeva gredna teorija više nije primjenjiva. U ovom se radu izvode izrazi za određivanje deformirane linije konzolne grede opterećene koncentriranom silom na slobodnom kraju pri velikim pomacima i rotacijama po uzoru na rad Bishoppa i Druckera. U rješenju, koje je znatno kompleksnije od onog po Euler-Bernoullijevoj grednoj teoriji, se pojavljuju eliptični integrali koji su u radu određeni koristeći softver Wolfram Mathematica. Za potrebe validacije teorijskog modela proveden je eksperiment s fleksibilnom letvom od plastike čiji su pomaci određeni optičkim mjerenjem koristeći tehnologiju korelacije digitalne slike (eng. Digital Image Correlation – DIC). Ustanovljeno je da teorijski model može precizno opisati deformiranu liniju konzole čak i za vrlo velike pomake slobodnog kraja grede.

Ključne riječi: konzola, gredna teorija, nelinearna analiza, veliki pomaci, velike rotacije, eksperiment

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

E-mail: leo.skec@uniri.hr, drupcic1@student.uniri.hr, nina.ceh@uniri.hr

Abstract

Euler-Bernoulli beam theory, which is traditionally used to solve engineering problems in construction, assumes that displacements and rotations of beams in the deformed state are relatively small. Such an assumption, apart from being completely justified for most engineering problems in construction, leads to a linear form of the kinematic equations of the problem, so the simplified mathematical formulation becomes very practical for use. However, in situations where the stiffness of the beam is such that it allows linear-elastic behaviour at relatively large deformations, the Euler-Bernoulli beam theory is no longer applicable. In this paper, expressions are derived for determining the deformed line of a cantilever beam loaded with a concentrated force at the free end at large displacements and rotations based on the work of Bishopp and Drucker. In the solution, which is significantly more complex than the one according to the Euler-Bernoulli beam theory, elliptic integrals appear, which were determined in the paper using Wolfram Mathematica software. For the purpose of validating the theoretical model, an experiment was conducted with a flexible bar made of plastic whose displacements were determined by optical measurement using Digital Image Correlation (DIC) technology. It was found that the theoretical model can accurately describe the deformed line of the cantilever even for very large displacements of the free end of the beam.

Key words: *cantilever, beam theory, nonlinear analysis, large displacements, large rotations, experiment*

1. Uvod

Kod projektiranja konstrukcija u građevinarstvu, osim nosivosti, potrebno je provjeriti i deformabilnost, što u pravilu podrazumijeva određivanje pomaka konstrukcije i njihovu usporedbu s nekim dopuštenim vrijednostima. Za tu se svrhu kod grednih nosača standardno koristi Euler-Bernoullijeva teorija [1] koja pretpostavlja da su pomaci osi grede (progibi) i zaokreti njihovih poprečnih presjeka u deformiranom stanju relativno mali. To dovodi do linearnog oblika kinematičkih jednadžbi [2], pa tako pojednostavljena matematička formulacija postaje vrlo efikasna za uporabu i rješavanje inženjerskih problema. K tome, u Euler-Bernoullijevoj grednoj teoriji pretpostavlja se linearno-elastično ponašanje materijala koje je opisano Hookeovim zakonom [1,2].

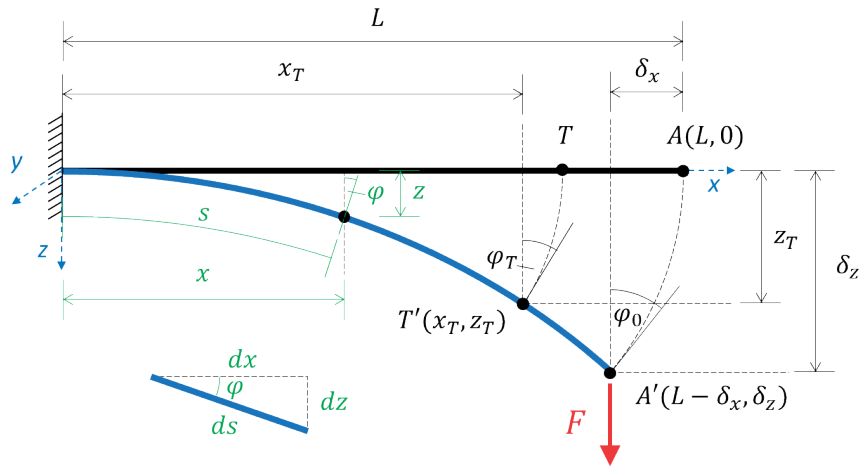
Fleksibilni nosači mogu imati linearno-elastično ponašanje pri relativno velikim pomacima u odnosu na njihove dimenzije, što znači da se Hookeov zakon može i dalje primjenjivati, ali više ne vrijedi Euler-Bernoullijeva gredna teorija. Pritom se samo ukida pretpostavka o malim pomacima i rotacijama, a zadržava se Bernoullijeva hipoteza [1,2] po kojoj u deformiranom stanju poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os nosača. U geometrijski egzaktnoj formulaciji (bez linearizacije), kut zaokreta poprečnog presjeka se u kinematičkim jednadžbama pojavljuje u

trigonometrijskim funkcijama, a ravnotežne jednačbe treba zapisati na deformiranom obliku konstrukcije s obzirom na to da on može znatno odstupati od početnog oblika. To dovodi do nelinearnog oblika kinematičkih i ravnotežnih jednačbi, pa je rješenje problema iz očitih razloga složenije nego u slučaju geometrijski linearne teorije. Treba naglasiti da je ovakav pristup složeniji od tzv. teorije II. kod koje se pretpostavlja da su pomaci i zaokreti konstrukcije relativno mali, ali se ravnotežne jednačbe zapisuju na deformiranom obliku konstrukcije (npr. izvod za Eulerovu kritičnu silu kod izvijanja ravnih štapova [3]).

U ovome radu prikazana je teorijska i eksperimentalna analiza deformiranja nosača pri velikim pomacima i rotacijama. U Poglavlju 2, po uzoru na rad Bishoppa i Druckera [4] te rad Beléndeza i ostalih [5], izvedeni su izrazi za određivanje deformacijske linije konzolne grede opterećene koncentriranom silom na slobodnom kraju pri velikim pomacima i rotacijama. U radovima [4] i [5] dane su i usporedbe rezultata za pomake slobodnog kraja konzole dobivene po geometrijski linearnoj i nelinearnoj analizi. U radu [5] dodatno je provedena i jednostavna eksperimentalna validacija modela pomoću čelične letve, dok je u ovome radu proveden eksperiment s fleksibilnom letvom od plastike čiji su pomaci određeni optičkim mjerenjem koristeći tehnologiju korelacije digitalne slike (eng. *Digital Image Correlation* – DIC). Opis eksperimenta, njegovi rezultati i usporedba s teorijskim modelom dana je u Poglavlju 3. Ustanovljeno je da teorijski model može precizno opisati deformiranu liniju konzole čak i za vrlo velike pomake slobodnog kraja grede. Zaključci su dani u Poglavlju 4.

2. Geometrijski nelinearna analiza konzolne grede

Shematski prikaz konzolne grede opterećene koncentriranom silom na slobodnom kraju (u točki A) dan je na Slici 1. Može se uočiti da pomak točke A ima dvije komponente, vertikalnu δ_z i horizontalnu δ_x . Kod geometrijski linearne analize pretpostavlja se da je horizontalni pomak zanemariv u odnosu na vertikalni pomak (koji je relativno mali). Prema Slici 1, položaj neke proizvoljne točke na gredi u deformiranom stanju opisan je koordinatama x_T i z_T .



Slika 1. Shematski prikaz početnog i deformiranog stanja konzolne grede pri relativno velikim pomacima i rotacijama

Slično kao i u Euler-Bernoullijevoj grednoj teoriji, deformirano stanje nosača opisano je diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

gdje su φ i M kut zaokreta poprečnog presjeka i moment savijanja na lučnoj koordinati s (vidi Sliku 1), a EI je krutost nosača na savijanje, pri čemu je E modul elastičnosti materijala, a I moment površine II. reda s obzirom na os oko koje vrti moment savijanja (prema Slici 1 to je os y). Iz izraza (1) slijedi da se ovakav računski model može primijeniti za sve materijale čije se ponašanje može opisati Hookeovim zakonom, čime podrazumijevamo da najveća naprezanja od savijanja neće prekoračiti granicu proporcionalnosti. Moment savijanja zapisuje se na deformiranom stanju pa je

$$M = -F(L - \delta_x - x) \quad (2)$$

gdje je negativan predznak posljedica konvencije o pozitivnim smjerovima unutrašnjih sila na nosaču. Kako je u (2) samo x ovisan o lučnoj koordinati s , deriviranjem (1) i uvrštavanjem (2) dobiva se

$$EI \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{dM}{ds} = -F \frac{dx}{ds} = -F \cos \varphi \quad (3)$$

što predstavlja nehomogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda s konstantnim koeficijentima po varijabli φ . U (3) treba primijetiti geometrijsku nelinearnost sadržanu u relaciji $dx/ds = \cos \varphi$.

Integriranjem (3) po kutu zaokreta poprečnog presjeka φ nakon sređivanja dobiva se

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{F}{EI} \sin \varphi + C = 0 \quad (4)$$

Konstantu integracije C određuje se iz uvjeta da je za $s = L$ $d\varphi/ds = 0$ (jer je $M(L) = 0$) i $\varphi = \varphi_0$ (vidi Sliku 1), pa (20) postaje

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{F}{EI} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) = 0 \quad (5)$$

odnosno

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm \sqrt{\frac{2F}{EI} \cdot \sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} \quad (6)$$

Budući da se kut φ povećava s koordinatom s , $d\varphi/ds > 0$, na desnoj strani u (6) mora biti pozitivni predznak jer je $\sin \varphi_0 > \sin \varphi$. Jednadžbu (6) potom zapisujemo tako da na lijevoj strani ostavljamo samo ds i integriramo po čitavoj gredi. Granice integracije su $\langle 0, L \rangle$ za s i $\langle 0, \varphi_0 \rangle$ za φ , što konačno daje

$$\sqrt{2}\alpha = \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} d\varphi \quad (7)$$

gdje je $\alpha = \sqrt{FL^2/EI}$. Integral u (7) se sređuje uvođenjem supstitucije [4]

$$1 + \sin \varphi = 2k^2 \sin^2 \theta = (1 + \sin \varphi_0) \sin^2 \theta \quad (8)$$

što dovodi do konačnog rješenja u obliku

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = K(k) - F(\theta_1, k) \quad (9)$$

gdje je $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2k}\right)$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}(\sin \varphi_0 + 1)}$, a $K(k)$ i $F(\theta_1, k)$ su potpuni i nepotpuni eliptični integrali prvog stupnja čija su rješenja za potrebe ovog rada određena uz pomoć softvera *Wolfram Mathematica*.

S obzirom da je $dz/ds = \sin \varphi$, koristeći (6) i integriranjem po z u granicama $\langle 0, \delta_z \rangle$ i φ u granicama $\langle 0, \varphi_0 \rangle$ dolazi se do

$$\frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} d\varphi = \frac{\delta_z}{L} \quad (10)$$

Korištenjem supstitucija (8), (10) se svodi na

$$\frac{1}{\alpha} \left[-2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta + 2 \int_0^{\theta_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta + \alpha \right] = \frac{\delta_z}{L} \quad (11)$$

gdje su θ_1 i k ranije definirani, a prvi i drugi integral u zagradi su potpuni ($E(k)$) i nepotpuni ($E(\theta_1, k)$) eliptični integral druge vrste, pa se (11) može zapisati kao

$$\frac{\delta_z}{L} = 1 - \frac{2}{\alpha} [E(k) - E(\theta_1, k)] \quad (12)$$

Rješenja integrala $E(k)$ i $E(\theta_1, k)$ koja su potrebna za određivanje pomaka slobodnog kraja konzole δ_z određena su uz pomoć softvera *Wolfram Mathematica*. Treba primijetiti kako na ovaj način progib slobodnog kraja konzole ne dobivamo ovisno o zadanom opterećenju (kao što je to slučaj kod linearne teorije), već ovisno o zadanom kutu zaokreta poprečnog presjeka slobodnog kraja konzole φ_0 . Opterećenje F pri kojem dolazi do progiba δ_z i kuta φ_0 može se dobiti preko parametra α kojeg se odredi iz (9). Kombinacijom (1), (2) i (6) te korištenjem uvjeta da je u upetom osloncu ($x = 0$) $\varphi = 0$, konačno dolazimo do izraza za horizontalni pomak slobodnog kraja konzole

$$\delta_x = L \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{\sin \varphi_0} \right) \quad (13)$$

Prema Slici 1, neka proizvoljna točka T na konzoli u deformiranom stanju dolazi u položaj $T'(x_T, z_T)$. Koordinata z_T može se odrediti modifikacijom (10), tako da je

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\varphi_T} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} d\varphi = \frac{z_T}{L} \quad (14)$$

gdje je φ_T kut zaokreta poprečnog presjeka u točki T . Analogno ranije objašnjenjnoj proceduri za određivanje δ_z konačno dobivamo

$$\frac{z_T}{L} = \frac{1}{\alpha} [-2E(\theta_2, k) + 2E(\theta_1, k) + F(\theta_2, k) - F(\theta_1, k)] \quad (15)$$

gdje je $\theta_2 = \arcsin \left(\frac{\sqrt{1 + \sin \varphi_T}}{k\sqrt{2}} \right)$. Analogno postupku za dobivanje rješenja za δ_x u (13) dobivamo

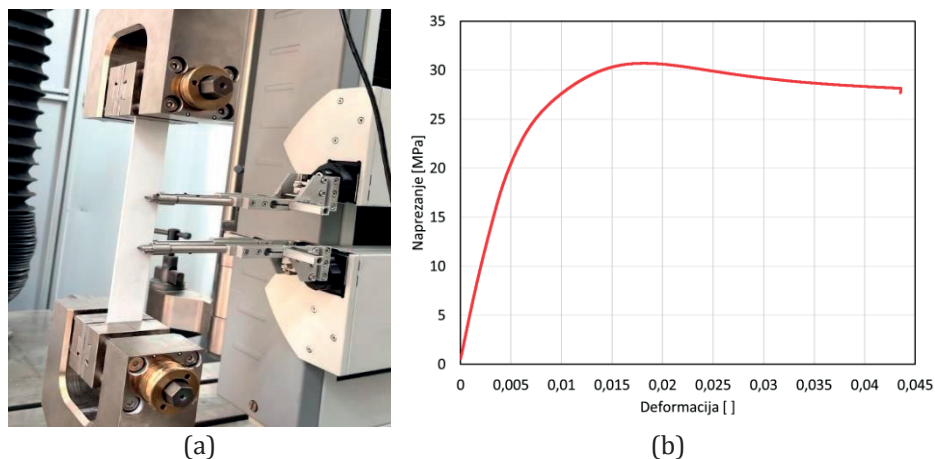
$$x_T = L \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_T} \right) - \delta_x \quad (16)$$

Uzimajući razne vrijednosti φ_T u rasponu od 0 do φ_0 pomoću (15) i (16) moguće je dobiti elastičnu liniju nosača, što je kasnije korišteno za usporedbu s eksperimentalnim mjerenjima.

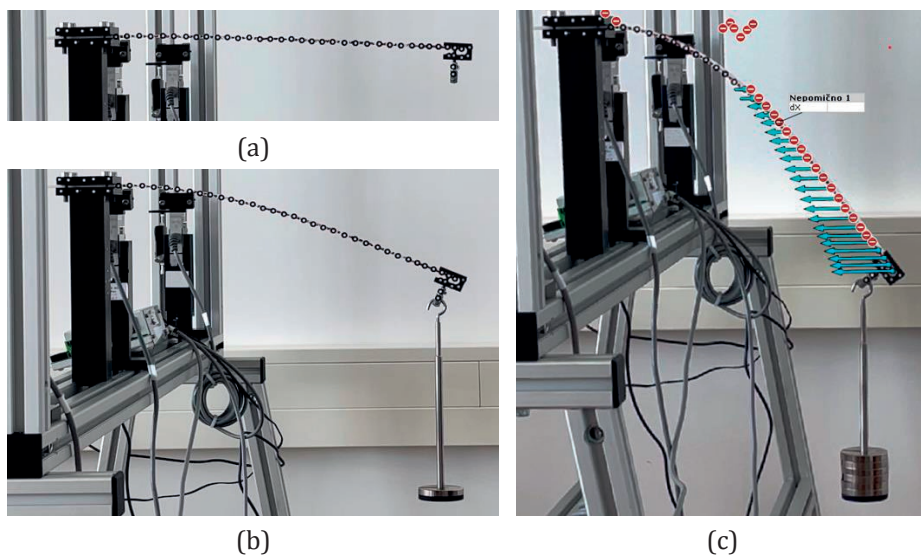
3. Eksperimentalni rezultati i usporedba s teorijskim modelom

Za potrebu validacije teorijskog modela izvedenog u prethodnom poglavlju proveden je eksperiment s fleksibilnom letvom od plastike dimenzija poprečnog presjeka $30 \times 3,1$ mm. Budući da materijalne osobine letve nisu bile poznate, u Laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci proveden je vlačni test u kidalici, što je prikazano na Slici 2(a). Rezultati ispitivanja dani su u obliku $\sigma - \varepsilon$ dijagrama na Slici 2(b). Modul elastičnosti iznosi 4770,2 MPa, a određen je kao nagib linearnog dijela dijagrama u rasponu naprezanja od oko 2,5 do 9 MPa. S obzirom da se u eksperimentu s konzolnom gredom savijanje događa oko slabije glavne osi poprečnog presjeka, za zadane dimenzije poprečnog presjeka je $I_{min} = 74,48 \text{ mm}^4$, a pripadajuća krutost $EI = E \cdot I_{min} = 355\,272,57 \text{ N/mm}^2$.

Eksperiment savijanja konzolne grede provodio se vješanjem utega na slobodnom kraju u sedam stadija. Konzola je na lijevom kraju bila ukliještena u oslonac, dok je na desnom kraju na letvu bila učvršćena kukica na koju su se vješali utezi. Duljina konzole (od upetog oslonca do točke pričvršćenja kukice) bila je 385 mm. S obzirom na malu krutost, konzola se već nakon ugradnje u upeti oslonac deformirala uslijed djelovanja vlastite težine. Kod usporedbe rezultata s teorijskim modelom, pomaci uzrokovani vlastitom težinom oduzeti su od konačnih vrijednosti pomaka kako bi se odredili pomaci koje uzrokuje isključivo opterećenje koncentriranom silom (vješalicom s utezima) na slobodnom kraju konzole. U prvom stadiju, na konzolu se postavila kukica težine 0,18 N (vidi Sliku 3(a)), u drugom je dodana vješalica za utege težine 1 N, a u sljedećim stadijima dodavali su se utezi težine 1 N (vidi Sliku 3(b)). Posljednji stadij odgovara opterećenju od 7,18 N i prikazan je na Slici 3(c). Može se uočiti da su deformacije konzolne grede značajne u odnosu na njezine dimenzije.



Slika 2. Ispitivanje uzorka letve od plastike u kidalici: (a) prikaz prihvata letve u čeljustima i ekstenzometara za mjerenje deformacije i (b) rezultati ispitivanja dani u $\sigma - \varepsilon$ dijagramu



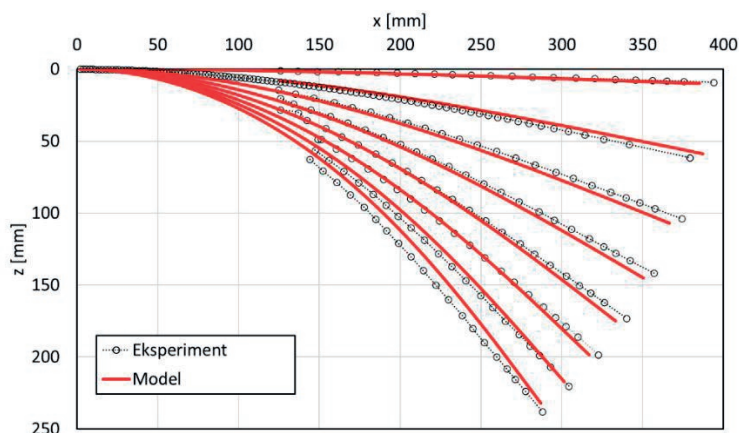
Slika 3. Prikaz deformiranog stanja konzolne grede za opterećenje: (a) 0,18 N, (b) 2,18 N i (c) 7,18 N

Na ispitanom uzorku mogu se uočiti markeri (mjerne točke) za optičko mjerenje koje je provedeno obradom snimki s mobilnog telefona u softveru *GOM Correlate* koristeći tehnologiju korelacije digitalne slike (*DIC*). Softver najprije dijeli referentnu fotografiju nedeformiranog stanja

mjerenog uzorka na fasete veličine $n \times n$ piksela. Na narednim fotografijama softver traži iste fasete te računa njihove pomake i deformacije u odnosu na referentno početno stanje.

Na Slici 3(c) vide se horizontalne komponente pomaka mjernih točaka koje softver računa u odnosu na početno stanje, koje u ovom slučaju odgovara stanju bez kukice i utega. Isto tako, može se uočiti kako softver nije uspio odrediti pomake za neke točke (bliže upetom osloncu), što pretpostavljamo da je posljedica kvalitete snimke i same obrade u softveru.

Za potrebe usporedbe optičkih mjerenja s predikcijama teorijskog modela, za sve stadije opterećenja (od 0,18 do 7,18 N) određene su koordinate mjernih točaka u koordinatnom sustavu čije je ishodište na desnom rubu upetog oslonca. Usporedba prikazana na Slici 4 pokazuje kako je model u stanju vrlo precizno predvidjeti deformirani oblik konzolne grede za slučaj velikih pomaka i rotacija.

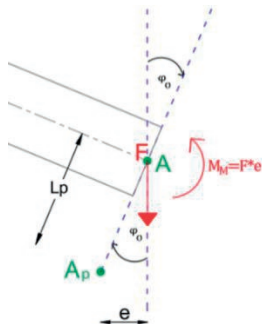


Slika 4. Usporedba deformiranog oblika konzolne grede dobivenog iz eksperimenta s predikcijom teorijskog modela za sve stadije opterećenja

S iznimkom 2. stadija ($F = 1.18$ N), može se primijetiti kako pri nižim opterećenjima model pretpostavlja veće deformacije od onih koje su izmjerene u eksperimentu. Pretpostavlja se da je to posljedica vješanja utega na kukicu, zbog čega pri većim pomacima grede os kojom prolazi težina utega odstupa od točke u kojoj se opterećenje prenosi na letvu. Kao što se može vidjeti na Slici 5, točka A_p , u kojoj se uteg vješa na kukicu, je od osi grede udaljena za iznos $L_p = 30$ mm, pa stvarno opterećenje na gredu u osi (točka A) uz silu F čini i moment $M_M = F \cdot e$. Taj moment je posljedica ekscentriciteta e , koji nastaje kada poprečni presjek A rotira za kut φ_0 . S obzirom da je $e = L_p \sin \varphi_0$, što se gređa više deformira, veći je

moment M_M koji na gredu ima suprotno djelovanje od djelovanja sile F . Naime, za razliku od sile F koja na gredi uzrokuje negativne momente savijanja, M_M uzrokuje pozitivne momente savijanja i zato umanjuje pomake uzrokovane silom F .

U Tablici 1 dana je usporedba momenta upetosti M_F uzrokovanog silom F i momenta M_M za rezultate dobivene teorijskim modelom, pri čemu je (sukladno (2)) $M_F = F \cdot (L - \delta_x)$. Očekivano, utjecaj momenta M_M povećava se sa silom F do te mjere da je u posljednjem stadiju $M_M/M_F \approx 9\%$. Ipak, na Slici 4 može se primijetiti da su u posljednja dva stadija pomaci grede određeni iz eksperimenta veći od onih koje predviđa teorijski model. Objašnjenje za to je odstupanje od linearno-elastičnog ponašanja materijala, što se može jednostavno dokazati analizom maksimalnih normalnih naprezanja u upetom osloncu koje određujemo kao $\sigma_{max} = M_F/W$, pri čemu je W moment otpora s obzirom na slabiju os poprečnog presjeka i iznosi $48,05 \text{ mm}^3$. Usporedimo li vrijednosti σ_{max} izračunate za svaki stadij s dijagramom prikazanim na Slici 2(b), možemo zaključiti kako izračunata naprezanja za posljednja tri stadija uopće nisu moguća te da je već nakon 3. stadija vjerojatno došlo do odstupanja od linearno-elastičnog ponašanja materijala u najopterećenijim točkama konzolnog nosača (kod upetog oslonca). Potvrda tome su eksperimentalni pomaci koji su izmjereni prilikom rasterećenja grede postupnim uklanjanjem utega. Za iste vrijednosti opterećenja uočene su razlike u deformiranom obliku grede prije i nakon rasterećenja, što upućuje na pojavu plastičnih deformacija i očitog odstupanja od linearno-elastičnog ponašanja materijala. Zbog toga je došlo do smanjenja krutosti grede i povećanja pomaka u odnosu na teorijske predikcije modela, ali se taj efekt kompenzirao s efektom ekscentriciteta opterećenja koji ima suprotni efekt. Na Slici 4 može se vidjeti kako u posljednja dva stadija efekt nelinearnog ponašanja materijala postaje dominantan, iako se tada, kao što smo to ranije pokazali, povećava i efekt ekscentriciteta opterećenja.



Slika 5. Efekt kukice za vješanje utega na opterećenje u osi grede

Tablica 1. Momenti M_F i M_M te maksimalna normalna naprezanja σ_{max} od momenta M_F u upetom osloncu za različite stadije opterećenja

F [N]	M_F [Nmm]	M_M [Nmm]	M_M/M_F	σ_{max} [MPa]
0,18	69,22	0,21	0,30 %	1,44
1,18	445,76	8,45	1,90 %	9,28
2,18	795,65	26,91	3,38 %	16,56
3,18	1105,92	52,55	4,75 %	23,02
4,18	1382,22	82,1	5,94 %	28,77
5,18	1622,64	113,74	7,01 %	33,77
6,18	1824,08	146,43	8,03 %	37,96
7,18	2000,63	179,58	8,98 %	41,64

4. Zaključak

U radu je dan detaljni izvod za analizu konzole pri velikim pomacima i rotacijama uz pretpostavku linearno-elastičnog ponašanja materijala. Izvedeni su izrazi za pomake slobodnog kraja konzole i koordinate neke proizvoljne točke na konzoli u deformiranom stanju, pri čemu se kao varijabla zadaje kut zaokreta poprečnog presjeka slobodnog kraja konzole, a sila koja dovodi do takvog zaokreta dobiva se proračunom.

Proveden je eksperiment u kojem se postepeno (u stadijima) opterećivalo i potom rasterećivalo fleksibilnu letvu od plastike koncentriranom silom na slobodnom kraju. U provedenom eksperimentu postignuti su relativno veliki pomaci koji su se optički mjerili za svaki stadij opterećenja. Pokazano je da je kroz sve stadije teorijski model u stanju s velikom preciznošću predvidjeti oblik deformiranog nosača koji je dobiven obradom optičkih mjerenja iz eksperimenta.

Usporedbom deformiranog oblika nosača prije i poslije rasterećenja uočeno je da je prilikom eksperimenta došlo do plastičnih deformacija, odnosno do odstupanja od linearno-elastičnog ponašanja materijala. Pretpostavlja se da je prilikom provođenja eksperimenta došlo do kompenzacije smanjenja krutosti (zbog odstupanja od linearno-elastičnog ponašanja materijala) s efektom ekscentričnosti sile koji nastaje zbog kukice za vješanje utega i time uzrokuje moment koji smanjuje progib konzole.

Kao nastavak ovog istraživanja bilo bi zanimljivo na sličan način riješiti problem i za neke druge tipove opterećenja (koncentrirane momente i kontinuirano poprečno opterećenje) te druge statičke sustave (npr. prosta greda). Sličan postupak rješavanja u geometrijski nelinearnoj analizi već je korišten za određivanje elastične linije nosača prilikom izvijanja [6].

Ukoliko se problem širi na materijalnu nelinearnost ili pak dinamičke probleme, preporučljivo je rješavati ga metodom konačnih elemenata.

Literatura

- [1] Šimić, V. (2002) Otpornost materijala I (2. izdanje). Školska knjiga, Zagreb.
- [2] Škec, L. (2021) Otpornost materijala I (predavanja). Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci, Rijeka.
- [3] Šimić, V. (1995) Otpornost materijala II (1. izdanje). Školska knjiga, Zagreb.
- [4] Bisshopp, K. E. i Drucker, D. C. (1945) Large Deflection of Cantilever Beams, *Quarterly of Applied Mathematics*, 3(3):272-275.
- [5] Beléndez, T., Neipp, C. i Beléndez, A. (2002) Large and Small Deflections of a Cantilever Beam. *European Journal of Physics*, 23(3): 371-379.
- [6] Škec, L., Šuput, N., Čeh, N. (2022) Eksperimentalna validacija teorijskih predikcija za izvijanje vitkih štapova, *Zbornik Radova (Građevinski Fakultet Sveučilišta U Rijeci)*, 25(1), 187-204. <https://doi.org/10.32762/zr.25.1.12>