

EKSPERIMENTALNA VALIDACIJA TEORIJSKIH PREDIKCIJA ZA IZVIJANJE VITKIH ŠTAPOVA

EXPERIMENTAL VALIDATION OF THEORETICAL PREDICTIONS FOR BUCKLING OF SLENDER RODS

Leo Škec*, Nikola Šuput*, Nina Čeh*

Sažetak

Izrazi za Eulerovu kritičnu silu pri kojoj dolazi do izvijanja ravnih vitkih štapova mogu se dobiti rješavanjem diferencijalne jednadžbe elastične linije nosača uz pretpostavku malih pomaka i rotacija. Obzirom da se takvim postupkom ne može odrediti elastičnu liniju nosača nakon što nastupi izvijanje, u ovom radu je korištena geometrijski nelinearna teorija za određivanje ravnotežnih oblika štapa u post-kritičnoj fazi s pripadajućim osnim opterećenjem. Za potrebe verifikacije teorijskih predikcija napravljena su dva eksperimenta izvijanja vitkog fleksibilnog štapa uz optičko mjerenje pomaka štapa. Eksperimenti su pokazali da teorijski model može vrlo točno predvidjeti deformirani oblik štapa i odgovarajuću vrijednost osne sile.

Ključne riječi: izvijanje, kritična sila, elastična linija nosača, post-kritično ponašanje

Abstract

Expressions for the Euler's critical load at which buckling of straight slender rods occurs can be derived by solving the differential equation of the elastic curve of the beam under the assumption of small displacements and rotations. As this procedure does not allow one to obtain the elastic curve of the rod after buckling takes place, in this work geometrically nonlinear theory is used for determining equilibrium states in the post-critical phase with the corresponding axial load. In order to verify the theoretical predictions, two experiments of buckling of a slender flexible rod were performed with optical measurements of rod's displacements. Experiments have shown that the theoretical model can very accurately predict the deformed shape of the rod and the corresponding value of the axial load.

Key words: buckling, critical load, elastic curve of a beam, post-critical behaviour

* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
E-mail: leo.skec,nina.ceh}@gradri.uniri.hr, nsuput@student.uniri.hr

1. Uvod

Izvijanje je pojava gubitka stabilnosti ravnog štapa opterećenog osnom tlačnom silom. Ukoliko neka sila nadmaši graničnu vrijednost do koje je ravan oblik ravnoteže štapa stabilan, dolazi do gubitka stabilnosti štapa te nastupa izvijanje. Ta se granična vrijednost naziva Eulerova kritična sila i označava se oznakom F_{kr} . Gubitak stabilnosti uzrokovan izvijanjem najčešća je pojava kod vitkih stupova te štapova koji mogu biti dio rešetkastih konstrukcija, a zanimljivo je da se može pojaviti i kod željezničkih tračnica uslijed spriječenih temperaturnih deformacija. Izvijanje u pravilu nastupa prije teorijskih predikcija zbog ekscentričnosti osnog opterećenja, kao i zbog početne zakrivljenosti i nehomogenosti štapa. Aksijalno opterećenje na koncu može uzrokovati lom štapa zbog povećanja momenta savijanja uslijed krivljenja osi štapa. Pri tom stanju, relativno mala opterećenja koja bi inače zadovoljavala uvjet čvrstoće mogu prouzročiti gubitak stabilnosti dijelova konstrukcija. Vrijednost kritične sile pri kojoj dolazi do izvijanja štapa ovisi o njegovoj vitkosti, materijalu od kojeg je načinjen, geometrijskim osobinama te načinu oslanjanja njegovih krajeva.

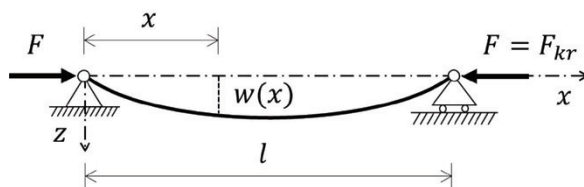
Teorija koja dovodi do izraza za kritičnu silu je geometrijski linearna, što znači da je bazirana na pretpostavci da su pomaci i zaokreti poprečnih presjeka štapa relativno mali u odnosu na dimenzije štapa. Osim što takva pretpostavka ima smisla jer je u teoriji netom prije izvijanja štap savršeno ravan, pa će i izvijanje nastupiti pri vrlo malim pomacima i rotacijama, na taj se način izvod za kritičnu silu značajno pojednostavljuje s matematičkog aspekta. Međutim, takav pristup nije u stanju dati točno rješenje za deformiranu (elastičnu) liniju nosača nakon što nastupi gubitak stabilnosti. To je moguće koristeći geometrijski nelinearnu teoriju koja u obzir uzima velike pomake i rotacije, što će biti pokazano u ovom radu. Takva teorija, uz to, pokazuje da se nakon izvijanja štap nastavlja deformirati jedino uz daljnje povećanje sile iznad kritične vrijednosti [1,2,3].

U ovom radu će najprije biti izvedeni Eulerovi izrazi za kritičnu silu po geometrijski linearnoj teoriji za slučaj štapa zglobno oslonjenog na oba kraja te konzolnog štapa (upet na jednom, slobodan na drugom kraju). Za ta dva načina oslanjanja će se potom pokazati analiza po geometrijski nelinearnoj teoriji koja u obzir uzima velike pomake i rotacije te na koncu daje izraze za određivanje elastične linije nosača i osnu silu u post-kritičnoj fazi. Uslijedit će prikaz eksperimentalnog istraživanja koje je provedeno s ciljem validacije teorijskih rješenja te će se nakon usporedbe eksperimenata i teorije dati zaključci i smjernice za daljnji rad.

2. Geometrijski linearna analiza izvijanja

Leonhard Euler je 1774. godine prvi izveo izraz za kritičnu silu i dokazao ovisnost vrijednosti kritične sile o načinu na koji su učvršćeni krajevi štapa. Ovdje ćemo ukratko pokazati izvod izraza za kritičnu silu za štap zglobno oslonjen na oba kraja te konzolni štap, dok se analogni izrazi za ostale načine oslanjanja (upeto-upeto i upeto-zglobno) mogu pronaći u [1].

Ukoliko je osna tlačna sila F koja djeluje na štap manje vrijednosti od kritične sile F_{kr} , štap će zadržati svoj ravni oblik. U trenutku kada sila F dosegne vrijednost F_{kr} , doći će do gubitka stabilne ravnoteže štapa i prijelaza iz ravnog u izvijeni (zakrivljeni) oblik (Slika 1). Prilikom analize izvijenog štapa zanemarujemo osno skraćivanje uzrokovano tlačnom silom te pretpostavljamo da duljina štapa neovisno o veličini sile uvijek iznosi l .



Slika 1. Deformirani oblika zglobno oslonjenog štapa prilikom izvijanja

U presjeku štapa na nekoj udaljenosti x od lijevog oslonca pojavljuje se moment savijanja $M(x) = F w(x)$, gdje je $w(x)$ progib štapa na koordinati x . Po geometrijski linearnoj teoriji, koja pretpostavlja da su pomaci i rotacije konstrukcijskog elementa relativno mali obzirom na njegove dimenzije, diferencijalna jednadžba elastične linije nosača za ovaj slučaj daje

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F w}{EI_{min}} \quad (1)$$

gdje je E modul elastičnosti materijala, a I_{min} minimalni moment površine II reda poprečnog presjeka štapa. Naime, izvijanje štapa događa se oko osi koja daje minimalnu krutost na savijanje EI_{min} . Uvođenjem supstitucije

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (2)$$

jednadžba (1) postaje homogena diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0 \quad (3)$$

Opće rješenje ove jednadžbe $w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$ se uz korištenje rubnih uvjeta $w(0) = 0$ i $w(l) = 0$ može reducirati na

$$w(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4)$$

gdje je $\alpha = n\pi/l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Ovakav izraz vrijedi samo za $A \neq 0$ jer za $A = 0$ dobivamo trivijalno rješenje $w(x) = 0$, kod kojega štap ostaje ravan, odnosno ne dolazi do izvijanja. Iz jednadžbe (2) za $n = 1$ i $\alpha = \pi/l$, dobivamo najmanju vrijednost sile pri kojoj može doći do izvijanja štapa, odnosno kritičnu silu

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (5)$$

Za $n = 1$, jednadžba (4) postaje

$$w(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x \quad (6)$$

od kuda se može pokazati da će elastična linija nosača prilikom izvijanja imati oblik jednog poluvala sinusoide između zglobnih oslonaca. Međutim, bez konstante A nije moguće odrediti vrijednosti progiba $w(x)$ prilikom izvijanja. Izraz (6) vrijedi za bilo koju vrijednost konstante A (pri čemu je $A \neq 0$) pa se u teoriji, nakon što sila u štapu dosegne kritičnu vrijednost, progib štapa može neograničeno povećavati u bilo kojem smjeru (dopušteni su i negativni progibi). Sve vrijednosti progiba $w(x) \neq 0$ odgovaraju sili F_{kr} , čime problem postaje neodređen.

U praksi takav nedostatak ovog izvoda ne predstavlja problem jer je kod projektiranja tlačnih štapova ključno osigurati da do izvijanja ne dođe, odnosno da je sila u štapu uvijek manja od kritične. Drugim riječima, kakvog će točno oblika biti štap ukoliko do izvijanja dođe, nije od praktičnog interesa. U ovom radu zanima nas upravo tzv. post-kritično ponašanje štapova prilikom izvijanja. Ukoliko se ukloni pretpostavka malih pomaka i rotacija, moguće je točno odrediti elastičnu liniju nosača, što će biti prikazano u sljedećem poglavlju.

Uz štap zglobno oslonjen na oba kraja, u ovom radu proučit ćemo još i slučaj kada je štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan (konzolni štap). Budući da se zaokret poprečnog presjeka može izraziti kao prva derivacija progiba, koristeći jednadžbu (6) može se pokazati da je kut zaokreta na sredini štapa koji je zglobno oslonjen na oba kraja jednak nuli. To nadalje znači da jedna polovica elastične linije takvog štapa (bilo $x \in [0, l/2]$ ili $x \in [l/2, l]$) po obliku zapravo odgovara elastičnoj liniji konzolnog štapa. Stoga, za konzolni štap duljine l , kritičnu silu možemo zapisati kao

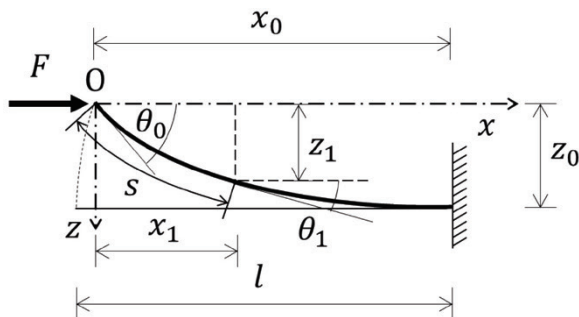
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2} \quad (7)$$

Ovu analogiju između štapa zglobno oslonjenog na oba kraja i konzolnog štapa koristit ćemo i u sljedećem poglavlju za rješenje problema po geometrijski nelinearnoj teoriji.

3. Geometrijski nelinearna analiza izvijanja

Kod geometrijski nelinearne teorije se, umjesto na početnoj konfiguraciji, ravnoteža uspostavlja na deformiranoj konfiguraciji (koja može značajno odstupati od početne). To znači da diferencijalna veza između deformacija i opterećenja više neće biti definirana obzirom na uzdužnu koordinatu štapa u početnoj (nedeformiranoj) konfiguraciji x , nego obzirom na lučnu koordinatu koja opisuje položaj na deformiranom štapu.

Sada promotrimo izvijeni konzolni štap opterećen tlačnom uzdužnom silom F , prikazan na Slici 2. Kao što se može primijetiti, ishodište koordinatnog sustava O postavljeno je na lijevom (slobodnom) kraju štapa pa se njegov položaj prilikom deformiranja štapa mijenja.



Slika 2. Deformirani oblika konzolnog štapa prilikom izvijanja

U nekoj točki na udaljenosti s od točke O (pri čemu se s mjeri uzduž deformirane osi štapa) kut zaokreta poprečnog presjeka možemo zapisati kao $\theta(s)$. Budući da je taj kut jednak prvoj derivaciji progiba u toj točki, analogno jednadžbi (1) sada možemo pisati

$$EI_{min} \frac{d\theta}{ds} = -F z \quad (8)$$

pri čemu je z vertikalna udaljenost od točke O do promatrane točke. Kao i ranije, pretpostavljeno je da se promjena duljine štapa uzrokovana tlačnom

silom može zanemariti. Obzirom da je $dz/ds = \sin \theta$, jednačba (8) može se zapisati kao

$$EI_{min} \frac{d^2\theta}{ds^2} = -F \sin \theta \quad (9)$$

Množenjem ovog izraza s $d\theta$ te integriranjem dobivamo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \alpha^2 \cos \theta + C \quad (10)$$

gdje je C konstanta integracije, a α je definiran u jednačbi (2). Budući da je na slobodnom (lijevom) kraju konzole moment savijanja jednak nuli (jer je $z = 0$), iz jednačbe (8) slijedi $d\theta/ds = 0$. Ako u točki O kut zaokreta poprečnog presjeka označimo kao θ_0 , iz jednačbe (10) konstantu integracije možemo izraziti kao

$$C = -\alpha^2 \cos \theta_0 \quad (11)$$

čime jednačba (10) postaje

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \alpha \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \quad (12)$$

Kako se kut zaokreta smanjuje od točke O prema upetom osloncu, $d\theta/ds$ je uvijek negativan pa jednačba (12) postaje

$$ds = - \frac{d\theta}{\alpha \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \frac{1}{2\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (13)$$

Ukupna duljina štapa sada se može dobiti kao

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (14)$$

Integral se može pojednostaviti uvođenjem supstitucije $p = \sin(\theta_0/2)$ i nove varijable φ na način da je

$$\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \varphi = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi \quad (15)$$

Budući da je $\theta \in [0, \theta_0]$, iz prethodnog izraza slijedi da je $\sin \varphi \in [0, 1]$, odnosno $\varphi \in [0, \pi/2]$. Koristeći jednačbu (15) možemo zapisati

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} \quad (16)$$

Deriviranjem jednadžbe (15) dolazi se do

$$d\theta = \frac{2p \cos \varphi \, d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2p \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} \quad (17)$$

Iz (15) može se dobiti

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = p \cos \varphi \quad (18)$$

Konačno, supstitucijom (17) i (18) u (14) dobivamo:

$$l = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\alpha} K(p) \quad (19)$$

gdje $K(p)$ predstavlja potpuni eliptični integral prve vrste koji ovisi samo o p . Integral se može približno riješiti razvojem u red potencija i obično se očitava iz tablica [5]. U ovom radu, za određivanje vrijednosti integrala $K(p)$ korišten je softver *Wolfram Mathematica* [6] koji ima ugrađene funkcije za eliptične integrale.

Ukoliko je izvijanje štapa takvo da su pomaci i zaokreti mali obzirom na dimenzije štapa, θ_0 i p će također biti mali, pa se onda izraz $p^2 \sin^2 \varphi$ može zanemariti u jednadžbi (19), čime ona postaje

$$l = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI_{min}}{F}} \quad (20)$$

što odgovara izrazu za kritičnu silu konzolnog štapa (jednadžba (7)).

Obzirom da je $dz = \sin \theta \, ds$, koristeći jednadžbu (13) progib slobodnog kraja konzole možemo zapisati kao

$$z_0 = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (21)$$

Iz (16) slijedi da je

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 p \sin \varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} \quad (22)$$

Supstitucijom jednadžbi (22), (18) i (17) u (21) dobivamo

$$z_0 = \frac{2p}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2p}{\alpha} \quad (23)$$

Progib slobodnog kraja konzole z_0 određuje se tako da najprije zadamo $\theta_0 > 0$ i odredimo odgovarajući $p = \sin(\theta_0/2)$ za koji iz jednadžbe (18) možemo dobiti α . Iz jednadžbe (2) dobije se i odgovarajuća vrijednost sile F koja odgovara progibu z_0 .

Koristeći $dx = \cos \theta ds$ nakon sređivanja može se dobiti

$$x_0 = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - l = \frac{2}{\alpha} E(p) - \frac{1}{\alpha} K(p) \quad (24)$$

gdje je $E(p)$ predstavlja kompletni eliptični integral druge vrste.

Koordinate (x_1, z_1) neke proizvoljne točke na štapu (vidi Sliku 2) možemo dobiti kao

$$x_1 = x_0 - \int_0^{\theta_1} \frac{\cos \theta d\theta}{2\alpha \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = x_0 - \frac{2E(\varphi_1, p)}{\alpha} + \frac{F(\varphi_1, p)}{\alpha} \quad (25)$$

$$z_1 = z_0 - \int_0^{\theta_1} \frac{\sin \theta d\theta}{2\alpha \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = z_0 + \frac{2p}{\alpha} (\cos \varphi_1 - 1) \quad (26)$$

gdje je $\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{1}{p} \sin \frac{\theta_1}{2}\right)$, što slijedi iz jednadžbe (15), a $E(\varphi_1, p)$ i $F(\varphi_1, p)$ su (nekompletni) eliptični integral druge i prve vrste, slijedom. Svi eliptični integrali u ovom radu određivani su uz pomoć softvera *Wolfram Mathematica* [6]. Pomoću izraza (25) i (26) moguće je odrediti kompletnu elastičnu liniju nosača za svaki $\theta_1 \in [0, \theta_0]$.

Analogni izrazi za štap zglobno oslonjen na oba kraja mogu se dobiti, kao i u 2. poglavlju, uzimajući u obzir da je kut θ na polovici takvoga štapa jednak nuli, što elastičnu liniju svake polovice čini identičnoj elastičnoj liniji konzole [2]. Jednadžba (19) sada postaje

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{\alpha} K(p) \quad (27)$$

gdje l sada predstavlja duljinu štapa koji je zglobno oslonjen na oba kraja, dok je $p = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, pri čemu je θ_0 zaokret poprečnog presjeka štapa na osloncima. Nadalje, udaljenost sredine štapa od svakog oslonca te progib na sredini štapa možemo zapisati kao

$$x_0 = \frac{2}{\alpha} E(p) - \frac{l}{2}, \quad z_0 = \frac{2p}{\alpha} \quad (28)$$

Koordinate (x_1, z_1) neke proizvoljne točke na štapu prilikom izvijanja mogu se dobiti na isti način kao i za konzolni štap koristeći izraze (25) i (26), pri čemu su sada x_0 i z_0 definirani jednadžbom (28).

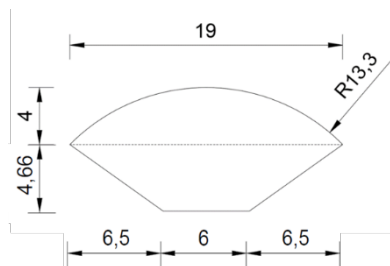
U sljedećem poglavlju provesti će se eksperimentalna validacija izraza iz kojih je moguće dobiti elastične linije prilikom izvijanja te odgovarajuća osna opterećenja za štap zglobno oslonjen na oba kraja i konzolni štap.

4. Eksperimentalni rezultati i usporedba s teorijom

Prije samih eksperimenata izvijanja određene su relevantne geometrijske i materijalne osobine štapa. Korišten je fleksibilni elastični štap od bukve omotan tankim plastičnim slojem, tako da se, striktno govoreći, radi o kompozitnom presjeku [7]. Štap ima relativno malu krutost na savijanje i veliku vitkost što omogućava da se pri izvijanju dogode relativno veliki progibi u elastičnom području. Drveni ili metalni štapovi pravilnijih poprečnih presjeka koji su nam bili na raspolaganju nisu bili toliko fleksibilni. Nužno je da štap ima jasno definiranu slabiju os poprečnog presjeka kako bi se unaprijed znalo u kojem se smjeru očekuje izvijanje.

Poprečni presjek štapa prikazan je na Slici 3. Koristeći duljinu tetive $t = 19$ mm i visinu kružnog odsječka $h = 4$ mm računski je određen polumjer štapa $R = 13.3$ mm, a potom i površina $A = 110.56$ mm² te minimalni moment površine II reda poprečnog presjeka $I_{min} = 499.97$ mm⁴ (za detalje proračuna vidi [4]). Os koja daje I_{min} je horizontalna os pomaknuta za 4.24 mm od gornjeg ruba presjeka.

Minimalnu krutost odredili smo koristeći eksperiment konzole opterećene poprečnom silom na slobodnom kraju za koju je progib na slobodnom kraju dan izrazom $\delta = FL^3/(3EI_{min})$, gdje je F poprečna sila na slobodnom kraju konzole, a L duljina konzole. Silu smo nanosili utezima, a pomak δ se očitavao pomoću mikroure. Za nekoliko različitih pomaka δ s pripadajućim silama F određena je prosječna vrijednost modula elastičnosti štapa $E = 1441.20$ N/mm² te minimalne krutosti $EI_{min} = 720410.50$ Nmm².



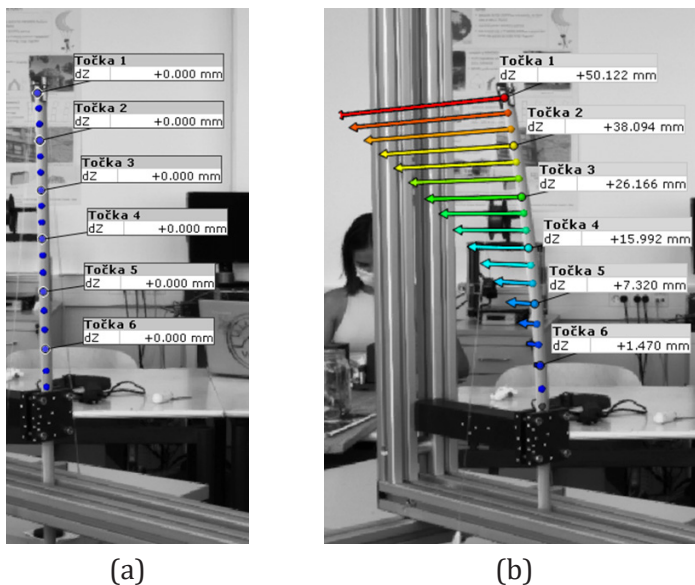
Slika 3. Poprečni presjek štapa korištenog u eksperimentima (mjere u mm)

U prvom eksperimentu, štap duljine 37.6 centimetara vertikalno je montiran na kruti okvir na način da je na donjem kraju upet, a na gornjem slobodan (Slika 4). Na vrhu slobodnog kraja štapa postavljena

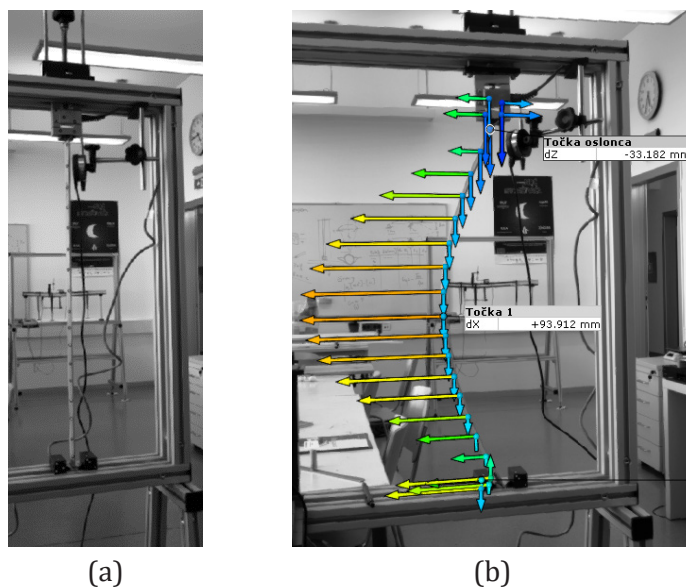
je plastična kapica za koju je nitima čvrstog ribarskog najlona obješena drvena ploča. Na ploču se postavljaju utezi čime se preko niti na slobodan kraj konzolnog štapa uvijek nanosi vertikalna sila. Paralelno se vrši 3D beskontaktno optičko mjerenje pomaka štapa pomoću sustava GOM mbH PONTOS koji radi na principu korelacije digitalnih slika (eng. *digital image correlation – DIC*). Eksperiment se snima kamerama, a obradom snimki se kasnije određuju pomaci štapa u točkama koje se prate (vidi Sliku 4). Uslijed povećanja opterećenja štap se kontinuirano savijao do određene vrijednosti pri kojoj više nije mogao zadržati stabilnu ravnotežu. Daljnje savijanje štapa je zaustavljeno kako ne bi došlo do loma.

U drugom eksperimentu koristi se štap duljine 68.4 centimetara koji je također vertikalno montiran na kruti okvir, ali je u ovom slučaju na oba kraja zglobno oslonjen (Slika 5). Štap opterećujemo kontroliranim pomakom preko navoja na gornjem osloncu gdje se mjeri i sila, dok je donji oslonac nepomičan. Sila i pomak na gornjem osloncu očitavaju se s digitalnog akvizicijskog uređaja koji prikuplja podatke s mjerne doze i mikroure. Uz to se kamerama snima sustav u svrhu određivanja pomaka točaka na štapu. Slično kao i u prethodnom eksperimentu, ovdje je došlo do kontinuiranog savijanja štapa pri svakom novom inkrementu pomaka na gornjem osloncu, a eksperiment je završen kada se gornji oslonac više nije mogao pomicati (kraj navoja). Ravnoteža je u svim koracima bila stabilna.

Analizom pomaka točaka u programu *GOM Correlate*, prethodno snimljenih sustavom kamera za 3D optičko mjerenje pomaka i deformacija, dobiven je kut zaokreta poprečnog presjeka na slobodnom kraju štapa u različitim stadijima koji odgovaraju svakom inkrementalnom povećanju sile. Dobiveni kutovi su zatim korišteni kao ulazni podaci za algoritam zapisan u programu *Wolfram Mathematica* [6] (vidi Prilog 1 za konzolni štap te Prilog 2 za zglobno oslonjeni štap) koji za svaki kut po geometrijski nelinearnoj teoriji daje elastičnu liniju nosača te vrijednost sile u štapu.



Slika 4. Konzolni štap u nedeformiranom (a) i deformiranom (b) obliku s označenim točkama za praćenje pomaka



Slika 5. Zglobno oslonjeni štap u nedeformiranom (a) i deformiranom (b) obliku s označenim točkama za praćenje pomaka

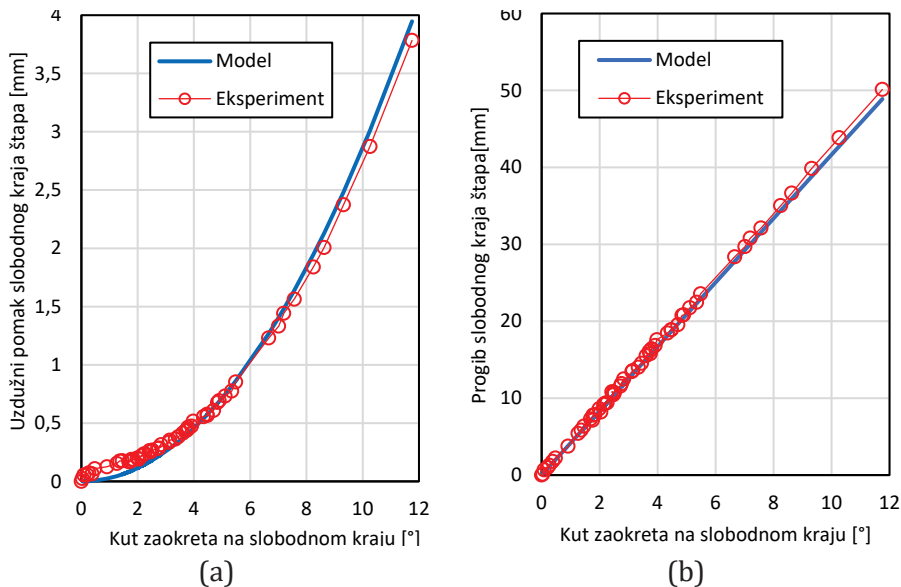
Slika 4(a) prikazuje štap opterećen samo težinom ploče privezanom nitima ribarskog najlona za čiju je težinu od 2.59 N program kalibriran kao početni stadij gdje su pomaci svih točaka jednaki nuli. Slika 4(b) pokazuje maksimalni pomak točaka štapa u zadnjem stadiju prije potpunog gubitka stabilnosti. Izmjereni su pomaci štapa u ukupno 56 stadija. Pomak štapa u uzdužnom i poprečnom smjeru u svakom stadiju određuje se u točkama koje se prate (točka 1 nalazi se na samom vrhu štapa). Radi preciznijeg približavanja kritičnoj sili, u prvih 8 stadija koristili su se utezi od 100 g, nakon čega se prešlo na manje utege, od 7.45 g do 3.65 g kroz preostale stadije. Maksimalna izmjerena vrijednost opterećenja iznosila je 12.5 N, dok Eulerova kritična sila po jednadžbi (7) za ovaj štap iznosi $F_{krit} = 12.57$ N.

Na Slici 6 su crvenim kružićima dane vrijednosti uzdužnog i poprečnog pomaka slobodnog kraja štapa za izmjerene vrijednosti kuta zaokreta poprečnog presjeka θ_0 na istom mjestu. θ_0 je ujedno i ulazni podatak za proračun po geometrijski nelinearnoj teoriji. Punom plavom linijom prikazani su teorijski pomaci slobodnog kraja konzole za različite vrijednosti θ_0 . Vidljivo je da su teorijske predikcije vrlo precizne.

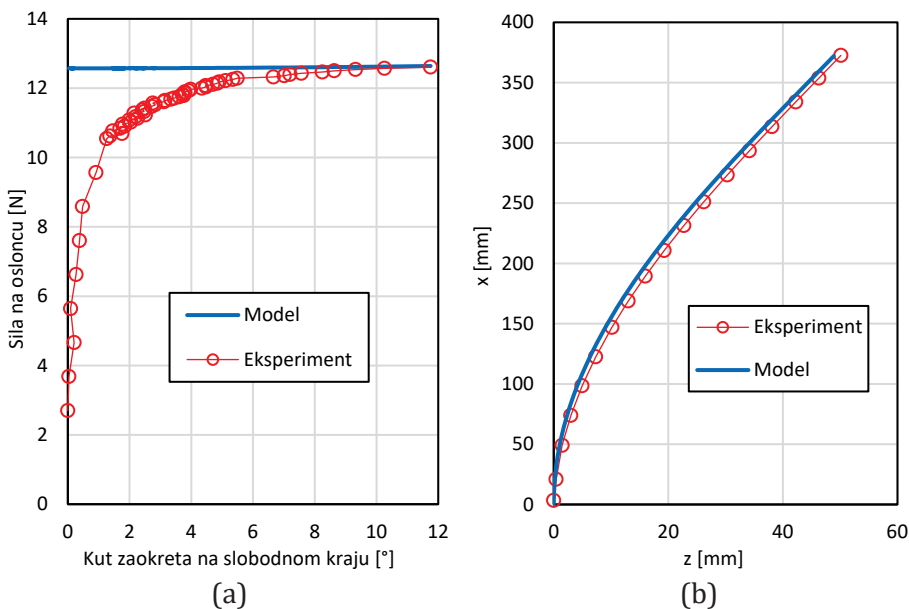
Na Slici 7(a) dana je usporedba izmjerenih i teorijski određenih vrijednosti sile za različite vrijednosti θ_0 . Po teoriji, štap se ne deformira dok nije dosegnuta vrijednost Eulerove kritične sile, a nakon toga sila nastavlja rasti uz povećanje progiba i zaokreta θ_0 . U eksperimentu se vidi da zbog početnih imperfekcija (neravnost štapa, ekscentricitet sile i sl.) i relativno male krutosti štapa dolazi do savijanja štapa pri vrijednostima sile znatno manjima od F_{kr} . Ipak, vidi se da eksperiment s povećanjem kuta θ_0 konvergira teorijskim rezultatima. Može se primijetiti i da je teorijsko povećanje sile u post-kritičnoj fazi u ovom slučaju vrlo blago (gotovo zanemarivo).

Usporedba elastičnih linija teorijskog modela i eksperimenta prikazana je na Slici 7(b). Određeni su položaji svih praćenih točaka na štapu u uzdužnom i poprečnom smjeru za posljednji stadij. Odstupanje je relativno malo, a iz Slike 6 može se zaključiti da bi ono bilo još i manje za neke ranije stadije.

Identična usporedba eksperimenta i teorijskog modela napravljena je i za slučaj štapa zglobno oslonjenog na oba kraju. U ovom slučaju uspoređivani su poprečni pomak točke na sredini štapa, uzdužni pomak točke na pomičnom osloncu te vrijednost sile. Kut zaokreta na samom osloncu je bilo nemoguće odrediti pa je za analizu korištena točka najbliža gornjem osloncu.



Slika 6. Pomaci slobodnog kraja konzolnog štapa u uzdužnom (a) i poprečnom (b) smjeru prilikom izvijanja.



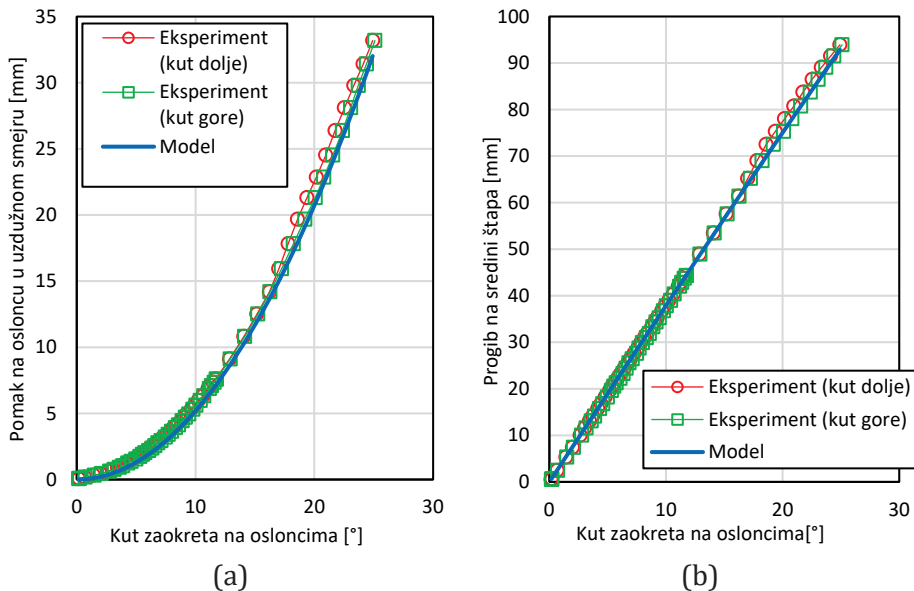
Slika 7. Ovisnost sile u štapu o zaokretu slobodnog kraja štapa (a) te elastična linija nosača za maksimalno izmjereno osno opterećenje (b) konzolnog štapa prilikom izvijanja.

Slika 8 prikazuje usporedbu progiba na sredini štapa i uzdužnog pomaka oslonca s njihovim teorijskim predikcijama. Podudarnost eksperimenta i modela je visoka, a manja odstupanja se mogu pripisati nedostatku mogućnosti mjerenja kuta zaokreta iz dodirne točke štapa i ležaja. Mjerenje kuta zaokreta se vršilo na označenim točkama udaljenim 11 mm od gornjeg oslonca i 21 mm od donjeg. Očekivano, veći kut zaokreta dobivamo na gornjem kraju gdje je mjerna točka bila bliže osloncu. Sukladno tome, podudarnost s teorijskim modelom bolja je na gornjem kraju.

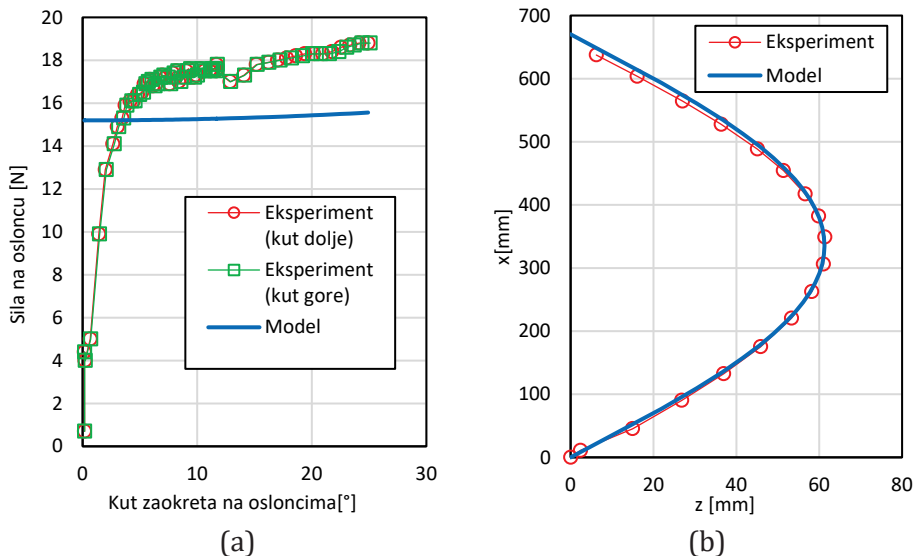
Na Slici 9(a) primjećuje se značajnije odstupanje izmjerene sile u osloncu u odnosu na vrijednost koju daje teorijski model (razlika je oko 20%). Nakon provjere uređaja za mjerenje sile te ponavljanja eksperimenta ustanovljeno je da su izmjereni podaci pouzdani. Do manjih nepreciznosti moglo je doći zbog nesavršenosti izrade zglobnih oslonaca u kojima se može javiti otežano zakretanje štapa, ali, kao što se može vidjeti na Slici 9(b), izmjerena elastična linija nosača jako se dobro podudara s teorijskom i nema naznake otežanog zakretanja štapa na osloncima.

Kao što je objašnjeno u 3. poglavlju, ulazni parametar za teorijski model po geometrijski nelinearnoj teoriji je kut zaokreta poprečnog presjeka slobodnog kraja konzole, odnosno kut zaokreta na ležaju kada se radi o štapu zglobno oslonjenom na oba kraja. S tim podatkom (θ_0) se određuje parametar $p = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ koji se pak koristi za određivanje vrijednosti eliptičnog integrala prve vrste $K(p)$. Kada je $K(p)$ poznat, za početnu duljinu štapa l iz izraza (19) za konzolni štap ili (27) za štap zglobno oslonjen na oba kraja slijedi vrijednost parametra α . Nakon toga, odrediti elastičnu liniju nosača može se pomoću izraza (25) i (26). Treba primijetiti da se u tom procesu nigdje ne pojavljuje osna sila F .

Osnu silu F određuje se naknadno iz jednadžbe (2) za prethodno određenu vrijednost parametra α i poznatu krutost EI_{min} . Stoga, ako isključimo grešku kod mjerenja sile, možemo zaključiti da je glavni uzrok za odstupanja mjerene sile i one koju daje model neprecizno određena krutost štapa, odnosno modul elastičnosti materijala od kojeg je štap izrađen. Eksperiment koji smo koristili za određivanje krutosti očito nije bio primjeren. U svrhu poboljšanja točnosti modela, modul elastičnosti trebalo bi odrediti pravim vlačnim testom štapa. Takva bi modifikacija imala utjecaja i na rezultate dobivene za konzolni štap. Međutim, kao što se može vidjeti na Slici 7(a), izmjerena sila u jednom trenutku dostiže teorijsku vrijednost, što nije realno, obzirom da je konzolni štap najosjetljiviji na imperfekcije poput neravnosti i ekscentriciteta sile. Stoga, izmjerena sila trebala bi biti (značajno) niža od teorijske predikcije (bez imperfekcija).



Slika 8. Uzdužni pomak na osloncu (a) te progib na sredini (b) štapa zglobno oslonjenog na oba kraja prilikom izvijanja.



Slika 9. Ovisnost sile u štapu o zaokretu na osloncu (a) te elastična linija nosača za maksimalno izmjereno osno opterećenje (b) štapa zglobno oslonjenog na oba kraja prilikom izvijanja.

5. Zaključak

U ovom radu analizirano je elastično izvijanje ravnog štapa u post-kritičnoj fazi. Geometrijski linearna teorija, kao što je to pokazano u 2. poglavlju, ne daje točan oblik elastične linije nosača nakon što nastupi izvijanje. Ako se problem analizira po geometrijski nelinearnoj teoriji (uzimajući u obzir velike pomake i rotacije), mogu se izvesti izrazi za elastičnu liniju nosača i odgovarajuću silu nakon izvijanja, što je učinjeno u 3. poglavlju za slučaj zglobno oslonjenog štapa te konzolnog štapa.

Ti su teorijski izrazi potom eksperimentalno validirani. Snimanjem eksperimenata sustavom za optičko mjerenje i kasnijom obradom mjerenja dobiveni su precizni podaci za pomake točaka na štapu u ravnini izvijanja te kut zaokreta poprečnog presjeka u karakterističnim točkama. Usporedbom tih podataka s vrijednostima teorijskog modela dobiveno je zadovoljavajuće podudaranje, pogotovo kada je riječ o deformiranom obliku štapa.

U oba eksperimenta je primijećeno da do krivljenja štapa dolazi već pri silama koje su značajno niže od Eulerove kritične sile. Takvo se ponašanje može pripisati nesavršenostima štapa, odnosno samog eksperimentalnog postava. U prvom eksperimentu se izmjerene sile asimptotski približavaju teorijskim predikcijama, ali u drugom je izmjerena sila oko 20% veća od teorijske. Zaključeno je da je do odstupanja došlo zbog netočno određenog modula elastičnosti materijala štapa pa će sljedeći korak biti njegovo preciznije određivanje iz vlačnog testa. Nadalje, u budućim istraživanjima može se pokušati izvesti analogna rješenja za obostrano upeti štap te štap zglobno oslonjen na jednom, a upet na drugom kraju.

Literatura

- [1] Šimić, V. (1995) Otpornost materijala II, 1. izdanje, Zagreb: Školska knjiga.
- [2] Bažant, Z.P., Cedolin, L. (2010) Stability of Structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories, Singapore: World Scientific Publishing.
- [3] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (2009) Theory of Elastic Stability, New York: Dover Publications.
- [4] Šuput, N. (2021) Eksperimentalna validacija teorijskih predikcija za izvijanje vitkih štapova, Završni rad, Rijeka: Građevinski fakultet sveučilišta u Rijeci.
- [5] Heuman, C. (1941). Tables of Complete Elliptic Integrals. Journal of Mathematics and Physics, 20(1-4), 127-206.
- [6] Wolfram Research Inc. (2017) Mathematica, Version 11.0.1.0, Champaign, IL.
- [7] Šimić, V. (2002) Otpornost materijala I, 2. izdanje, Zagreb: Školska knjiga.

Prilog 1

EL. LINIJA NOSAČA - KONZOLA

UVOD

Ovaj algoritam izračunava elastičnu liniju nosača konzolnog štapa te odgovarajuću vrijednost osne tlačne sile za zadani kut zaokreta poprečnog presjeka na slobodnom kraju. Taj se postupak automatski ponavlja za listu izmjerenih kutova zaokreta zadanih u datoteci "DATA.csv". Od ulaznih parametara potrebno je zadati duljinu štapa i minimalnu krutost na savijanje te broj točaka za diskretizaciju elastične linije nosača. Za svaku vrijednost kuta zaokreta očitano iz ulazne datoteke "DATA.csv" se u datoteku "RESULTS.csv" zapisuju uzdužni pomak na slobodnom kraju, progib na slobodnom kraju, kut zaokreta poprečnog presjeka na slobodnom kraju te odgovarajuća vrijednost tlačne osne sile, a u zasebne datotke "ELASTICA-i".csv" (x,y) koordinate elastične linije nosača.

ULAZNI PODACI

```
l = 376.; (* DULJINA ŠTAPA [mm] *)
EI = 720410.5; (* MINIMALNA KRUTOST ŠTAPA NA SAVIJANJE [N*mm^2] *)
n = 100; (* BROJ TOČAKA ZA DISKRETIZACIJU ELASTIČNE LINIJE NOSAČA *)
col = 1; (* STUPAC U KOJEM SE U DATOTEKI
"DATA.csv" NALAZI KUT ZAOKRETA NA JEDNOM OD OSLOMACA *)
```

PRORAČUN

```
DATA = Import [NotebookDirectory [] <> "DATA.csv", "CSV"];
nrow = Dimensions [DATA] [[1]]; (* BROJ REDAKA U ULAZNOJ DATOTEKI "DATA.csv" *)
Do [
  θ0[i] = DATA [[i, col]] °;
  p = Sin [θ0[i] / 2];
  k = EllipticK [p^2] / l;
  P[i] = k^2 EI; (* TLAČNA OSNA SILA *)
  xdis[i] = Abs [2 / k EllipticE [p^2] - 2 l]; (* UZDUŽNI POMAK NA SLOBODNOM KRAJU *)
  ydis[i] = 2 p / k; (* PROGIB PROGIB SLOBODNOM KRAJU *)
  (* ELASTIČNA LINIJA NOSAČA *)
  For [j = 0, j < n + 1, j++,
    {θ[j] = θ0[i] (1 - j / n);
     φ[j] = ArcSin [1 / p Sin [θ[j] / 2]];
     x[j] = Abs [-2 / k EllipticE [φ[j], p^2] + 1 / k EllipticF [φ[j], p^2]];
     y[j] = Abs [2 p / k (Cos [φ[j]] - 1)];
    ];
  xy[i] = Table [{x[j], y[j]}, {j, 0, n}];
  Export [NotebookDirectory [] <> "ELASTICA-" <> ToString [i] <> ".csv", xy[i];
  , {i, 1, nrow}];
Results = Table [{xdis[i], ydis[i], θ0[i] / °, P[i]}, {i, 1, nrow}];
Export [NotebookDirectory [] <> "RESULTS.csv", Results];
```

Prilog 2

EL. LINIJA NOSAČA - PROSTA GREDA

UVOD

Ovaj algoritam izračunava elastičnu liniju nosača zglobno oslonjenog štapa te odgovarajuću vrijednost osne tlačne sile za zadani kut zaokreta poprečnog presjeka na osloncu. Taj se postupak automatski ponavlja za listu izmjerenih kutova zaokreta zadanih u datoteci "DATA.csv". Od ulaznih parametara potrebno je zadati duljinu štapa i minimalnu krutost na savijanje te broj točaka za diskretizaciju elastične linije nosača. Za svaku vrijednost kuta zaokreta očitano iz ulazne datoteke "DATA.csv" se u datoteku "RESULTS.csv" zapisuju uzdužni pomak na kliznom osloncu, progib na sredini raspona, kut zaokreta poprečnog presjeka na osloncu te odgovarajuća vrijednost tlačne osne sile, a u zasebne datotke "ELASTICA-i".csv" (x,y) koordinate elastične linije nosača.

ULAZNI PODACI

```
l = 684.; (* DULJINA ŠTAPA [mm] *)
EI = 720410.5; (* MINIMALNA KRUTOST ŠTAPA NA SAVIJANJE [N*mm^2] *)
n = 100; (* BROJ TOČAKA ZA DISKRETIZACIJU ELASTIČNE LINIJE NOSAČA *)
col = 1; (* STUPAC U KOJEM SE U DATOTEKI
"DATA.csv" NALAZI KUT ZAOKRETA NA JEDNOM OD OSLONACA *)
```

PRORAČUN

```
DATA = Import [NotebookDirectory [] <> "DATA.csv", "CSV"];
nrow = Dimensions [DATA] [ [1] ]; (* BROJ REDAKA U ULAZNOJ DATOTEKI "DATA.csv" *)
Do [
  θ0[i] = DATA [ [i, col] ] °;
  p = Sin [θ0[i] / 2];
  k = 2 EllipticK [p^2] / 1;
  P[i] = k^2 EI; (* TLAČNA OSNA SILA *)
  xdis [i] = 1 - 2 (2 / k EllipticE [p^2] - 1 / 2); (* UZDUŽNI POMAK KLIZNOG OSLONCA *)
  ydis [i] = 2 p / k; (* PROGIB NA SREDINI RASPONA *)
  (* ELASTIČNA LINIJA NOSAČA *)
  For [j = 0, j < n + 1, j ++,
    {θ[j] = θ0[i] (1 - 2 j / n);
     φ[j] = ArcSin [1 / p Sin [θ[j] / 2] ];
     x[j] =
       2 / k EllipticE [p^2] - 1 / 2 - 2 / k EllipticE [φ[j], p^2] + 1 / k EllipticF [φ[j], p^2];
     y[j] = 2 p / k + 2 p / k (Cos [φ[j]] - 1);
    ];
  xy [i] = Table [ {x[j], y[j]}, {j, 0, n} ];
  Export [NotebookDirectory [] <> "ELASTICA-" <> ToString [i] <> ".csv", xy [i];
  , {i, 1, nrow}];

Results = Table [ {xdis [i], ydis [i], θ0[i] / °, P [i]}, {i, 1, nrow}];
Export [NotebookDirectory [] <> "RESULTS.csv", Results];
```