RJEŠENJE POISSONOVE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRIMJENOM GREENOVE FUNKCIJE

SOLUTION OF POISSON PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION USING GREEN'S FUNCTION

Tomislav Franković[*], Nermina Mujaković[**]

Sažetak

Rješavanje Poissonove parcijalne diferencijalne jednadžbe primjenom Greenove funkcije analitički je postupak određivanja rješenja za dane rubne uvjete. U ovom radu dana je teoretska baza određivanja Greenove funkcije za zadanu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koja je definirana u domeni D, pri čemu mora zadovoljiti određene rubne uvjete na granici domene C. Za navedeni Dirichletov problem prikazano je rješenje Poissonove parcijalne diferencijalne jednadžbe, a na kraju su prikazana dva primjera.

Ključne riječi: *Poissonova jednadžba, Greenova funkcija, Dirichletov problem*

Abstract

Obtaining a solution of the Poisson partial differential equation using Green's function represents an analytic method for determining the solution for the defined boundary value problems. In this paper the theoretical basis for the Green's function has been elaborated for the Poisson partial differential equation which is defined in domain D with boundary values on boundary C. The solution for the Poisson partial differential equation for the Dirichlet problem with two examples is shown.

Key words: *Poisson equation, Green's function, Dirichlet problem*

* Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci
E-mail: tomislav.frankovic@gradri.uniri.hr
** Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci
E-mail: mujakovic@inet.hr

Rad zaprimljen: 9. 6. 2017. Rad prihvaćen: 26. 9. 2017

1. Uvod

Parcijalne diferencijalne jednadžbe opisuju vezu između nepoznate funkcije i njezinih parcijalnih derivacija, a često se pojavljuju u raznim dijelovima matematike, fizike i inženjerskih područja. Mogućnost njihova rješavanja ovisi o početnim i rubnim uvjetima za promatrani problem. Prema francuskom matematičaru Jacquesu Hadamardu [1] problem koji je opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom mora biti dobro postavljen, pri čemu mora zadovoljiti svaki od navedenih triju kriterija :

1. postojanje rješenja
2. jedinstvenost rješenja
3. stabilnost.

Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi temelji se na zadovoljenju gore navedenih kriterija, a pritom se koriste razne analitičke i numeričke metode. Analitičke metode koristile su se u početku razvoja rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, pri čemu je njihov razvoj pratio razvoj raznih područja matematike i fizike. Razvojem programiranja i raznih računalnih programa značajan razvoj doživjele su razne numeričke metode, npr. metoda konačnih elemenata i metoda konačnih volumena.

Opći oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog stupnja u ravnini može se zapisati u obliku

$$M \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + P \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Q \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + R \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + S \cdot u = T \, , \tag{1}$$

gdje su koeficijenti M, N, P, Q, R, S *i* T funkcije varijabli x i y, a funkcija u rješenje je parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Pri rješavanju (1) polazi se od pretpostavke da su funkcija u i koeficijenti M, N, P, Q, R, S i T klase C^2 u promatranoj ravnini. Teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi razlikuje hiperbolične, parabolične i eliptične parcijalne diferencijalne jednadžbe, pri čemu se klasikacija u pojedinu grupu temelji na vrijednosti determinante izraza (1).

U nastavku će se analizirati Poissonova parcijalna diferencijalna jednadžba koja predstavlja nehomogenu eliptičnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, koja opisuje vezu između nepoznate funkcije $u(x,y)$, njezinih parcijalnih derivacija po varijablama x i y te zadane funkcije $f(x,y)$ u ravninskoj domeni D.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (x,y) \in D \, . \tag{2}$$

Rješenje $u(x,y)$ mora zadovoljiti (2), ali i moguće rubne uvjete na granici domene C. Pritom se razlikuju tri moguća problema [2] :

a) Dirichletov problem

b) Neumannov problem

c) Robinov problem.

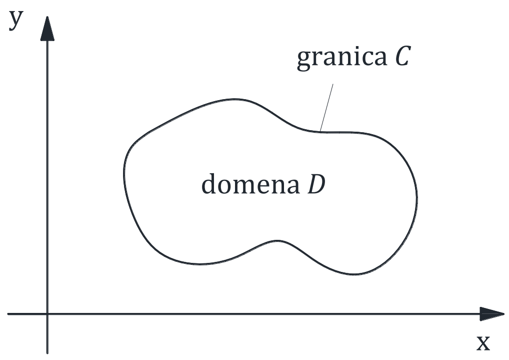
Navedeni problemi ovise o tome je li na granici C definirana vrijednost funkcije (Dirichletov problem), derivacije (Neumannov problem) ili je na granici C definirana vrijednost funkcije i derivacije (Robinov problem). U nastavku će se analizirati Dirichletov problem.

Definicija 1. Problem opisan Poissonovom jednadžbom (2) i Dirichletovim rubnim uvjetom

$$u(x,y) = h(x,y) \qquad (x,y) \in C \tag{3}$$

za zadanu funkciju $h(x,y)$ naziva se Dirichletov problem.

Na Slici 1. prikazana je domena D proizvoljne geometrije u kojoj vrijedi Poissonova parcijalna diferencijalna jednadžba (2), a omeđena je granicom C, gdje vrijedi Dirichletov rubni uvjet (3).



Slika 1. Prikaz ravninske domene D i njezine granice C

2. Rješenje Poissonove jednadžbe

2.1. Teoretska osnova Greenove funkcije

Primjena Greenove funkcije pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi temelji se na prikazu rješenja $u(x,y)$ u integralnom obliku i primjene linearne superpozicije. Jednadžba (2) može se prikazati u izmijenjenom obliku

$$L[u(x,y)] = f(x,y), \tag{4}$$

gdje je L linearni parcijalni diferencijalni operator, a $u(x,y)$ i $f(x,y)$ funkcije neovisnih varijabli x i y.

Definicija 2. Diracova delta funkcija $\delta_{(x,y)}(\xi,\eta)$ u dvodimenzionalnom prostoru jest generalizirana funkcija iz teorije distribucija, za koju vrijedi

$$\delta_{(x,y)}(\xi,\eta) = \delta(\xi - x, \eta - y). \tag{5}$$

Izraz (5) mora zadovoljiti uvjete

$$\delta(\xi - x, \eta - y) = 0 \quad \text{za} \quad (\xi,\eta) \neq (x,y) \tag{6}$$

$$\iint_D \delta(\xi - x, \eta - y)\, d\xi d\eta = 1 \tag{7}$$

$$\iint_D f(\xi,\eta)\delta(\xi - x, \eta - y)\, d\xi d\eta = f(x,y), \tag{8}$$

gdje je D ravninska domena, a f funkcija definirana u domeni D.

Na temelju (5), (6) i (7) može se zaključiti da je delta funkcija $\delta_{(x,y)}(\xi,\eta)$ jednaka nuli u svim točkama promatrane domene D osim u točki (x,y), u kojoj teži u beskonačnost. Diracova delta funkcija u ravninskoj domeni može se prikazati kao umnožak dviju jednodimenzionalnih Diracovih delta funkcija [1], te se može zapisati u obliku

$$\delta(\xi - x, \eta - y) = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y). \tag{9}$$

Primjenom Diracove delta funkcije $\delta_{(x,y)}(\xi,\eta)$, funkcija $f(x,y)$ u jednadžbi (4) pretvara se u niz delta funkcija u različitim točkama domene D.

Definicija 3. Greenova funkcija $G(x,y;\xi,\eta)$ predstavlja odgovor u točki (x,y) zbog djelovanja pobude točki (ξ,η), pri čemu mora biti zadovoljen uvjet

$$L[G(x,y;\xi,\eta)] = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y). \tag{10}$$

Množenjem (10) s $f(\xi,\eta)$ i integracijom po površini domene tako da vrijedi $dA = d\xi d\eta$ dobije se

$$\iint_D L[G(x,y;\xi,\eta)] f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \iint_D \delta(\xi - x)\delta(\eta - y) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = f(x,y). \tag{11}$$

Izvlačenjem linearnoga diferencijalnog operatora L ispred dvostrukog integrala dobiva se rješenje $u(x,y)$ u integralnom obliku

$$u(x,y) = \iint\limits_D G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta \,. \tag{12}$$

Izraz (12) općeniti je prikaz rješenja $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednadžbe u domeni D. U praktičnom smislu Greenova je funkcija $G(x,y;\xi,\eta)$ karakteristična vrijednost ovisna o diferencijalnom operatoru i broju promatranih neovisnih varijabli, a ne ovisi o desnoj strani jednadžbe (4).

2.2. Dirichletov problem

Rješenje Poissonove parcijalne diferencijalne jednadžbe u domeni D i pripadnog Dirichletova rubnog uvjeta na granici C opisano je izrazom

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) && (x,y) \in D \\ &u(x,y) = h(x,y) && (x,y) \in C \end{aligned} \,. \tag{13}$$

Na granici domene C Greenova funkcija poprima vrijednost nula, a u domeni D vrijedi $\nabla^2 G = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y)$, gdje je $\nabla^2 G = \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}$.

Greenova je funkcija simetrična [2], pri čemu vrijedi

$$G(x,y;\xi,\eta) = G(\xi,\eta;x,y). \tag{14}$$

U točkama $(x,y;\xi,\eta)$ Greenova je funkcija G kontinuirana, a prva parcijalna derivacija $\partial G/\partial n$ ima diskontinuitet u točki (x,y), što je definirano jednadžbom [2]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n} ds = 1 \,, \tag{15}$$

gdje je n vanjska normala na kružnicu C_ε definirana kao

$$C_\varepsilon : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \varepsilon^2 \,, \tag{16}$$

pri čemu je ε polumjer kružnice, a točka (x,y) središte kružnice C_ε.

Greenova funkcija može se zapisati u obliku

$$G(x,y;\xi,\eta) = G_0(x,y;\xi,\eta) + g(x,y;\xi,\eta), \tag{17}$$

gdje je član G_0 Greenova funkcija kada nema rubnih uvjeta.

U domeni D članovi G_0 i g moraju zadovoljiti ove uvjete:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G_0 &= \delta(\xi - x)\delta(\eta - y) \\ \nabla^2 g &= 0 \end{aligned} \quad . \tag{18}$$

Kako bi vrijedilo pravilo superpozicije (17), na granici C mora vrijediti

$$\begin{aligned} G &= 0 \\ g &= -G_0 \end{aligned} \quad . \tag{19}$$

Ovdje će se najprije dati partikularno rješenje za slučaj kada nema rubnih uvjeta (*eng. free space Green's function*). Rješenje G_0 može se pretpostaviti u obliku

$$G_0 = a + b \cdot \log r \, , \tag{20}$$

gdje su a i b konstante, koje je potrebno odrediti.

Uvrštavanjem (20) u (15) dobiva se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial G_0}{\partial n} ds = 1 \, . \tag{21}$$

Raspisivanjem (21) proizlazi da je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n}(a + b \log r)\varepsilon d\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} b d\theta = 1 \, . \tag{22}$$

Rješavanjem integrala dobiva se vrijednost konstante b

$$b = \frac{1}{2\pi} \, . \tag{23}$$

Vrijednost konstante a može se proizvoljno odabrati, pa se zbog jednostavnosti uzima da je $a = 0$. Rješenje G_0 može se tada zapisati u obliku

$$G_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \log r = \frac{1}{4\pi} \cdot \log\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right]. \tag{24}$$

Pretpostavimo da nam je za svaki $(x,y) \in D$ poznata takva Greenova funkcija $G = G(x,y;\xi,\eta)$ koja, osim uvjeta za Laplacian (dobiven deriviranjem po varijablama ξ i η), zadovoljava i uvjet da za $(\xi,\eta) \in C$ vrijedi $G(x,y;\xi,\eta) = 0$. Tada funkciju $u(x,y)$, koja je rješenje problema (13), možemo dobiti primjenom Greenove druge formule, pri čemu Greenova druga formula povezuje dvostruki integral definiran u domeni D s jednostrukim integralom po granici C.

Za dvije proizvoljno odabrane funkcije φ i ψ Greenova druga formula može se zapisati u ovom obliku:

$$\iint_D \left(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi\right)dA = \int_C \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds. \tag{25}$$

Funkcije φ i ψ ovise o varijablama ξ i η :

$$\begin{aligned}\varphi(\xi,\eta) &= G(x,y;\xi,\eta)\\ \psi(\xi,\eta) &= u(\xi,\eta)\end{aligned}. \tag{26}$$

Uvrštavanjem (26) u (25) dobiva se

$$\begin{aligned}&\iint_D \left[G(x,y;\xi,\eta)\nabla^2u - u(\xi,\eta)\nabla^2G\right]d\xi d\eta\\ &= \int_C \left[G(x,y;\xi,\eta)\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\right]ds\end{aligned}. \tag{27}$$

U domeni D vrijede ovi uvjeti:

$$\begin{aligned}\nabla^2u &= f(\xi,\eta)\\ \nabla^2G &= \delta(\xi - x)\delta(\eta - y)\end{aligned}. \tag{28}$$

Na granici C vrijedi

$$\begin{aligned}G &= 0\\ u(\xi,\eta) &= h(\xi,\eta)\end{aligned}. \tag{29}$$

Uvrštavanjem (28) i (29) u (27) Greenova druga formula poprima oblik

$$\begin{aligned}&\iint_D \left[G(x,y;\xi,\eta)\cdot f(\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\cdot\delta(\xi - x)\delta(\eta - y)\right]d\xi d\eta\\ &= \int_C \left[0\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - h(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\right]ds\end{aligned}. \tag{30}$$

Iz jednadžbe (30) dobiva se opći oblik rješenja Dirichletovog problema za Poissonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (13)

$$u(x,y) = \iint_D G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int_C h(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y;\xi,\eta)ds. \tag{31}$$

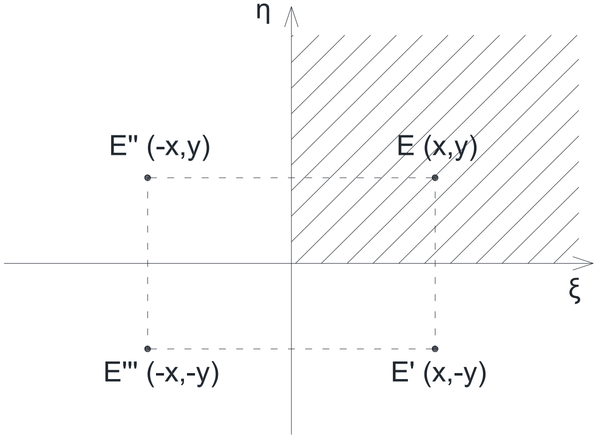
Na temelju (31) može se zaključiti da rješenje $u(x,y)$ ovisi o vrijednosti Greenove funkcije $G(x,y;\xi,\eta)$. Međutim, točan izraz za određivanje funkcije G može se dobiti samo u ograničenom broju domena, pri čemu točni analitički izrazi većinom vrijede jedino za kružne i pravokutne domene [3]. Mogućnost dobivanja vrijednosti G ovisi također o glatkoći krivulje C i njezinu obliku.

Na temelju izvedenog rješenja Poissonove diferencijalne jednadžbe (31) može se zaključiti da se cijeli postupak može rastaviti na dva dijela, pri čemu prvi dio obuhvaća određivanje Greenove funkcije $G(x,y;\xi,\eta)$ u točki (x,y) pri djelovanju impulsne pobude u točki (ξ,η), a drugi dio temelji se na zbrajanju odgovora na sve impulse u promatranoj domeni D i njezinoj granici C.

3. Primjeri

3.1. Rješenje Poissonove jednadžbe u gornjem desnom kvadrantu

Domena $D=\{(\xi,\eta):\xi>0,\eta>0\}$, u kojoj je definirana Poissonova diferencijalna jednadžba, obuhvaća gornji desni kvadrant kao što je prikazano na Slici 2. U promatranom kvadrantu nalazi se točka $E(x,y)$.



Slika 2. Promatrani gornji desni kvadrant (ξ>0 i η>0)

Za odabranu točku mogu se odrediti tri zrcalne točke E'(x,-y), E''(-x,y) te E'''(-x,-y). Koristeći te točke, Greenova funkcija G može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} G(x,y;\xi,\eta) = {} & \frac{1}{4\pi}\cdot\log\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]-\frac{1}{4\pi}\cdot\log\left[(\xi-x)^2+(\eta+y)^2\right] \\ & -\frac{1}{4\pi}\cdot\log\left[(\xi+x)^2+(\eta-y)^2\right]+\frac{1}{4\pi}\cdot\log\left[(\xi+x)^2+(\eta+y)^2\right] \end{aligned} \tag{32}$$

Na rubu domene vrijedi da je $\xi = 0$ ili $\eta = 0$, tj. vrijednost funkcije $G(x,y;\xi;\eta)$ mora biti jednaka nuli. Zbog činjenice da se zrcalne slike ne nalaze u domeni D, Laplaceov operator za drugi, treći i četvrti član gornjeg izraza daje vrijednost nula. Na temelju toga dolazi se do zaključka da je Greenova funkcija jednaka (32), te se može zapisati u pojednostavnjenom obliku

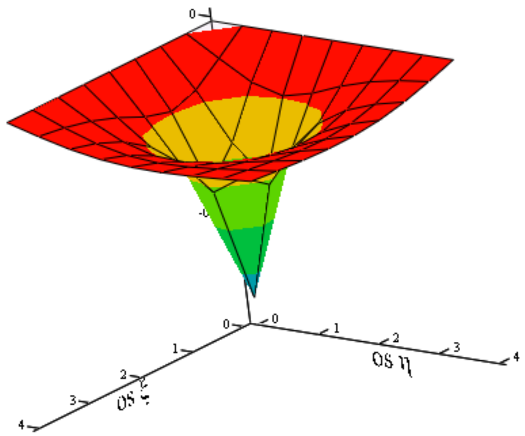
$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\cdot\log\frac{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right)\cdot\left((\xi+x)^2+(\eta+y)^2\right)}{\left((\xi-x)^2+(\eta+y)^2\right)\left((\xi+x)^2+(\eta-y)^2\right)}. \tag{33}$$

Na granici domene C vrijede ovi uvjeti:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=\frac{-4xy\eta}{\pi\cdot\left(x^2+(y+\eta)^2\right)\cdot\left(x^2+(y-\eta)^2\right)} \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=\frac{-4xy\xi}{\pi\cdot\left((x-\xi)^2+y^2\right)\cdot\left((x+\xi)^2+y^2\right)} \tag{35}$$

Na Slici 3. prikazana je Greenova funkcija (33) izračunata za točku domene (x,y) = (1.41, 1.73).



Slika 3. Prikaz Greenove funkcije (33) za točku (x,y) = (1.41, 1.73)

Uvrštavanjem (33), (34) i (35) u (31) i uvođenjem integracijskih granica dobije se rješenje $u(x,y)$ za Dirichletov problem (13) definiran u gornjemu desnom kvadrantu

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \log\frac{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right)\cdot\left((\xi+x)^2+(\eta+y)^2\right)}{\left((\xi-x)^2+(\eta+y)^2\right)\cdot\left((\xi+x)^2+(\eta-y)^2\right)} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
& + \frac{4xy}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\eta\cdot h(0,\eta)}{\left(x^2+(y+\eta)^2\right)\left(x^2+(y-\eta)^2\right)}\,d\eta \\
& + \frac{4xy}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\xi\cdot h(\xi,0)}{\left((x-\xi)^2+y^2\right)\left((x+\xi)^2+y^2\right)}\,d\xi
\end{aligned}
\tag{36}
$$

3.2. Pomaci kvadrtne membrane

Kvadratna mebrana duljine stranice L = 3,0 m i vrlo male debljine t oslonjena je na svojim krajevima na oslonce, a opterećena je površinskim kontinuiranim opterećenjem 0,25 N/m^2. Potrebno je odrediti pomak točke u sredini membrane pod djelovanjem zadanog opterećenja.

Pomak membrane $u(x,y)$ može se opisati Poissonovom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom

$$
\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(\xi,\eta) \qquad 0 < x < L \ \text{ i } \ 0 < y < L\,. \tag{37}
$$

Rubni su uvjeti na krajevima membrane ovi:

$$
\begin{aligned}
& u(x,0) = u(x,L) = 0 \\
& u(0,y) = u(L,y) = 0
\end{aligned}\,. \tag{38}
$$

Rješenje jednadžbe (37), ako su zadovoljeni rubni uvjeti (38), može se zapisati u obliku

$$
u(x,y) = \int_0^L\int_0^L G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,. \tag{39}
$$

Opći izraz Greenove funkcije $G(x,y;\xi,\eta)$, pri deformiranju pravokutne membrane raspona a x b, preuzet je iz literature [1]

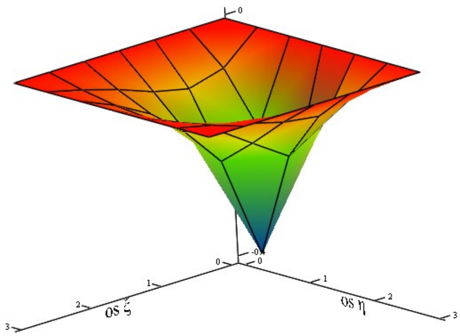
$$
G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{ab}\cdot\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{b}\right)}{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,, \tag{40}
$$

gdje se Greenova funkcija $G(x,y;\xi,\eta)$ određuje s pomoću metode svojstvenih vrijednosti [4], a N i M predstavljaju broj svojstvenih vrijednosti.

Za kvadratnu membranu vrijedi *a* = *b* = *L*, a izraz (40) postaje

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{L^2}\cdot\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{L}\right)}{\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{m^2\pi^2}{L^2}}. \tag{41}$$

Vrijednost Greenove funkcije (41) u točki (x,y) = (0.80, 1.40) prikazana je na Slici 4.



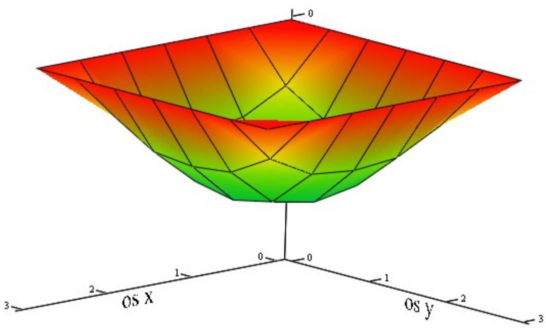
Slika 4. Prikaz Greenove funkcije (41) za točku (x,y) = (0.80, 1.40)

Funkcija opterećenja $f(\xi,\eta)$ može se pretpostaviti u obliku

$$f(\xi,\eta)=0{,}25. \tag{42}$$

Uvrštavanjem (41) i (42) u (39) dobije se rješenje kojim se opisuju pomaci kvadratne mebrane

$$u(x,y)=\int_0^L\int_0^L\frac{1}{L^2}\cdot\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{L}\right)}{\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{m^2\pi^2}{L^2}}d\xi d\eta. \tag{43}$$



Slika 5. Deformacijski oblik kvadratne membrane duljine stranice L = 3,0 m

U primjeru kvadratne membrane Greenova funkcija G i pomak u određeni su primjenom 10 svojstvenih vrijednosti *(N = M = 10)*. Najveći pomak prikazan na Slici 5. zadane kvadratne membrane opterećene kontinuiranim površinskim opterećenjem od 0,25 N/m^2 nalazi se u točki (1.5, 1.5) i iznosi 16,2 cm.

Rješenje (43) vrijedi kada je membrana izrađena od homogenoga izotropnog materijala, a njezina je debljina vrlo mala u odnosu prema duljini njezinih stranica (t<<L), pa se zbog toga ne uzima u obzir pri određivanju pomaka. Također, izraz (43) ne obuhvaća modul elastičnosti E materijala membrane, te vrijedi jedino kada kontinuirano opterećenje ima statičko djelovanje. U praktičnim problemima pomak u(x,y), dobiven s pomoću Greenove funkcije, vrijedi jedino pri analizi membrane jednostavnih oblika (kružna i pravokutna), a zbog heterogenosti i anizotropnosti građevinskih materijala može se koristiti jedino za preliminarno određivanja pomaka.

4. Zaključak

Primjena Greenove funkcije u rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi daje rješenje promatrane jednadžbe u integralnom obliku, pri čemu se za određenu domenu i pripadne rubne uvjete mogu dobiti jednostavniji oblici rješenja. Također, postojanje Greenove funkcije ovisi o promatranom problemu, tj. najviše ovisi o mogućnosti dobivanja njezina izraza na granici domene C. U općenitom slučaju njezina primjena može se proširiti s ravninske domene u višedimenzionalni prostor za rješavanje linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima neovisno o broju neovisnih varijabli.

Greenova funkcija G u određivanju rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi najviše ovisi o obliku domene D u ravnini, glatkoći njezine granice C te dobivanju njezina analitičkog izraza. Ako je poznata Greenova funkcija, rješenje Poissonove jednadžbe $u(x,y)$ dobije se uvođenjem integracijskih granica i integriranjem po domeni D i granici C.

Literatura

[1] Myint-U, T., Debnath, L. 2007. *Linear partial differential equations for scientists and engineers.* Birkhauser. Boston.

[2] Olver, P. 2014. *Introduction to partial differential equations.* Springer.

[3] Pinchover, Y., Rubinstein, J. 2005. *An introduction to partial differential equations.* Cambridge University Press. New York.

[4] Duffy, D. G. 2015. *Green's functions with applications.* CRC Press. Boca Raton.